

RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE

**A. Zviedris**

# **Elektrisko mašīnu elektromagnētiskie aprēķini**

Rīgas Tehniskā universitāte  
Rīga 2001

Šajā mācību līdzeklī iztirzāti elektrisko mašīnu elektromagnētisko lauku aprēķina pamatjautājumi: elektromagnētiskā lauka vienādojumi, robežnosacījumi, skaitlisko metožu un datortehnikas izmantošana.

Mācību līdzeklis paredzēts elektromehānisko specialitāšu studentiem.

Zinātniskais redaktors Dr. sc. ing. K.Ketners

Izdots saskaņā ar Enerģētikas institūta Padomes lēmumu, protokols Nr.12(25)  
23.11.2000.

© Rīgas Tehniskā universitāte

## 1. Elektrisko mašīnu magnētisko lauku un tā aprēķina metožu vispārīgs raksturojums

Enerģijas pārveidošana elektriskajās mašīnās un transformatoros notiek ar magnētiskā lauka starpniecību. No šī lauka rakstura un parametriem daudzējādā ziņā ir atkarīgi elektrisko mašīnu galvenie raksturlielumi – magnētiskā plūsma, EDS, elektromagnētiskais moments, induktīvās pretestības, zudumi u.c. lielumi.

Magnētisko lauku elektriskajās mašīnās nosacīti var iedalīt galvenajā laukā un izkliedes laukā. Ar galveno lauku saprot magnētisko lauku, kas, izejot caur gaisa spraugu, caurtver statora un rotora tinumus. Maiņstrāvas mašīnās tas parasti ir pirmās harmonikas magnētiskais lauks. Tādējādi ar galvenā magnētiskā lauka starpniecību enerģija tiek pārnesta no statora tinumu uz rotora tinumu vai otrādi.

Izkliedes lauki un maiņstrāvas mašīnu magnētiskā lauka augstākās harmonikas izraisa virkni nevēlamu parādību – palielina induktīvās pretestības, papildus noslogo magnētisko ķēdi, palielina nepieciešamo ierosmes jaudu, rada papildzudumus mašīnas aktīvajos un konstruktīvajos elementos u.tml.

Projektējot elektriskās mašīnas, pamatuzdevums ir panākt optimālu magnētiskā lauka sadalījumu un tas, galvenokārt, reducējas uz konstruktīvo parametru tādu izvēli, kas nodrošinātu vislabvēlīgākos apstākļus galvenā magnētiskā lauka pastāvēšanai, kā arī uz izkliedes lauku un augstāko harmoniku lauku samazināšanu.

Elektrisko mašīnu magnētisko lauku pētīšanā iznāk saskarties gan ar analīzes, gan sintēzes uzdevumiem. Analīzes uzdevums ir noskaidrot, kā dažādi parametri (strāva, magnētiskās sistēmas atsevišķu elementu forma un ģeometriskie izmēri, magnētisko materiālu īpašības u.c.) ietekmē magnētiskā lauka raksturu un no tā atkarīgos mašīnas darba raksturlielumus. Sintēzes uzdevums ir panākt magnētiskā lauka tādu sadalījumu, kas nodrošinātu noteiktus uzdotos raksturlielumus (magnētisko plūsmu, EDS, elektromagnētisko momentu u.c.).

Elektromagnētisko lauku jebkurā elektriskā mašīnā jebkurā tās darba režīmā var aprakstīt ar elektromagnētiskā lauka jeb Maksvela vienādojumiem, kas ir otrās kārtas parciālo atvasinājumu diferenciālvienādojumi. Taču šo vienādojumu korekta un precīza atrisināšana ir saistīta ar nopietnām grūtībām. Tas izskaidrojams, pirmkārt, ar to, ka magnētiskā sistēma sastāv no elementiem, kuru magnētiskā īpašības ir ļoti atšķirīgas (piemēram, feromagnētiska vide un gaiss). Turklāt atsevišķu magnētiskās sistēmas elementu ģeometriskā forma ir samērā sarežģīta, kas, savukārt, rada nopietnas grūtības robežnosacījumu ievērošanā. Visbeidzot, tas apstāklis, ka elektriskajās mašīnās izmantojamo feromagnētisko materiālu raksturlielnes ir nelineāras, noved pie tā, ka risināmie elektromagnētiskā lauka diferenciālvienādojumi ir nelineāri, t.i., vienādojumi ar mainīgiem koeficientiem, un tāpēc risināšanai tiešā veidā nav izmantojamas klasiskās analītiskās metodes.

Ievērojot šos minētos, kā arī citus apstākļus, elektromagnētiskā lauka vienādojumu atrisināšana nav iespējama bez vienkāršojumiem un pieņēmumiem uzdevuma nostādņē. Šādus vienkāršojumus un pieņēmumus izdara, pamatojoties uz iepriekšēju magnētiskā lauka rakstura fizikālu analīzi, vadoties no līdzīgu uzdevumu

risināšanas pieredzes, vai arī daļēji izmantojot eksperimentālus datus, ja tādi ir. Uz minēto vienkāršojumu bāzes tiek izveidots idealizēts aprēķina modelis, kas vairāk vai mazāk atšķiras no reālā objekta. Šāda aprēķina modeļa izveidošana ir ļoti atbildīgs posms jebkura magnētiskā lauka aprēķināšanas procesā.

Galvenais princips aprēķina modeļa izvēlē ir tāds, ka vienkāršojumi un pieņēmumi nedrīkst būtiski ietekmēt aprēķina precizitāti, tajā pašā laikā ļaujot ievērojami vienkāršot elektromagnētiskā lauka vienādojumu risināšanas procesu.

Neraugoties uz to, ka dažādu uzdevumu risināšanā izdarāmie pieņēmumi var būt ļoti dažādi un atkarīgi no daudziem apstākļiem, vadoties no pieredzes, var minēt šādus aprēķinu praksē bieži izmantotus vienkāršojumus un pieņēmumus.

1. Pieņem, ka magnētiskās sistēmas feromagnētisko materiālu magnētiskā caurlaidība  $\mu_{Fe}$  ir konstants lielums ( $\mu_{Fe} = \text{const}$ ), kaut gan īstenībā šis lielums ir atkarīgs no magnētiskās indukcijas  $B$  ( $\mu_{Fe} = f(B)$ ), t.i., no aprēķina gaitā meklējamā lieluma. Izdarot pieņēmumu  $\mu_{Fe} = \text{const}$ , elektromagnētiskā lauka vienādojumi pārveidojas par lineāriem vienādojumiem, kuru atrisināšana jau ir daudz vienkāršāka. Var atzīmēt, ka pieņēmums  $\mu_{Fe} = \text{const}$  maz ietekmē aprēķina rezultātu, ja mašīnas magnētiskā sistēma ir nepiesātināta ( $B \leq 0,6 - 0,8$  T).

2. Interesējoties par magnētiskā lauka sadalījumu nemagnētiskā vidē (gaisa spraugā, starppolu telpā, tinumu zonās), var pieņemt, ka šai videi piegulošo feromagnētisko elementu magnētiskā caurlaidība  $\mu_{Fe} = \infty$ , jo ir zināms, ka normālos apstākļos  $\mu_{Fe} \gg \mu_0$ , kur  $\mu_0$  – vakuuma magnētiskā caurlaidība (praktiski šāda magnētiskā caurlaidība ir arī gaisam un tinumu materiāliem – varam, alumīnijam). Izdarot pieņēmumu  $\mu_{Fe} = \infty$ , magnētisko lauku aprēķinos var aprobežoties tikai ar kaut kādu lokālu apgabalu, piemēram, apgabalu, kuru no divām pusēm norobežo statora un rotora virsmas, un tādējādi ļauj ievērojami vienkāršot uzdevuma risināšanas procesu. Tajā pašā laikā šāds pieņēmums ļauj detalizēti izpētīt statora un rotora zobu zonas ģeometrijas ietekmi uz magnētiskā lauka raksturu.

3. Pieņem, ka elektromagnētiskais lauks elektriskajā mašīnā ir plakanparalēls (divdimensionāls), t.i., lauka raksturlielumi (magnētiskā indukcija  $B$  un magnētiskā lauka intensitāte  $H$ ) izmainās tikai radiālā un tangenciālā virzienā, bet nemainās mašīnas aksiālajā virzienā. Īstenībā elektromagnētiskais lauks elektriskajā mašīnā ir telpisks (trīsdimensionāls), jo mainās arī aksiālajā virzienā un jebkuram lauka raksturojošam vektoriālajam lielumam ir trīs komponentes. Taču šāds lauka trīsdimensionālais raksturs ir tikai nelielā apgabalā, t.i. mašīnas neaktīvajā daļā – tinumu frontālo savienojumu zonā. Pieņēmums par lauka plakanparalēlo raksturu lauka kopējo ainu ietekmē jo mazāk, jo mazāka ir mašīnas diametra  $D$  attiecība pret garumu  $L$  ( $D/L$ ). Tāpēc, ievērojot vēl arī to, ka enerģijas pārveidošanas process noris galvenokārt mašīnas aktīvajā daļā, praktiski ļoti daudzus gadījumos pieņēmums par lauka plakanparalēlo raksturu neienes būtisku kļūdu aprēķina rezultātos.

4. Kopējo magnētisko lauku sadala atsevišķās zonās, pieņemot, ka vienas zonas lauks nav saistīts ar citas zonas laukiem un tie viens otru savstarpēji neietekmē. Tā, piemēram, daudzus gadījumos galveno lauku var aplūkot neatkarīgi no izklīdes lauka, rievu vai tinuma frontālo savienojumu zonas lauku – neatkarīgi no galvenā lauka, statora lauku – neatkarīgi no rotora lauka, augstāko harmoniku magnētiskos laukus – neatkarīgi no pamatharmonikas magnētiskā lauka u.tml.

5. Aprēķinot magnētisko lauku, ko vienlaikus rada vairāki lauka avoti (piemēram, enkura strāva un ierosmes strāva), izmanto superpozīcijas principu. Superpozīcijas principa būtība ir tā, ka vairāku avotu radīta rezultējošā lauka aprēķina uzdevumu sadala atsevišķos uzdevumos, t.i., vispirms aprēķina katra atsevišķā avota radīto lauku un pēc tam šos laukus summē. Īstenībā superpozīcijas principa izmantošana ir korekta tikai lineārām sistēmām un praktiski neietekmē precizitāti nepiesātinātās magnētiskās sistēmas gadījumā, kad sakarība starp magnētisko plūsmu  $\Phi$  un magnetizētājspēku  $F = iw$  ir lineāra (magnetizēšanas līknes sākuma daļa). Tik tiešām, ja piesātinātās magnētiskās sistēmas magnētisko plūsmu nosaka, izmantojot superpozīcijas principu, tad magnētiskā plūsma  $\Phi' = \Phi_1 + \Phi_2$ , kur  $\Phi_1 = f(F_1)$ ,  $\Phi_2 = f(F_2)$ , bet  $\Phi' \neq \Phi$ , kur faktiskā plūsma  $\Phi = f(F_1 + F_2)$ .

6. Izdara vienkāršojumus, kas saistīti ar atsevišķu magnētiskā sistēmas elementu ģeometrisku formu, t.i., neievēro dažādus izgriezumus, caurumus, noapaļojumus u.tml. Piemēram, aprēķinot galvenā magnētiskā lauka sadalījumu, vienkāršo polu ģeometrisku formu, rievu ģeometrisku formu, neievēro vai tuvināti ievēro statora vai rotora rievu ietekmi un citus katrā konkrētajā gadījumā nebūtiskus faktoros.

Magnētisko lauku pētīšanai un aprēķināšanai praksē lieto analītiskās, skaitliskās, matemātiskās modelēšanas, fizikālās modelēšanas un eksperimentālās metodes. Katrai no šīm metodēm ir savas priekšrocības un trūkumi un to izmantošana ir atkarīga no lietotāja teorētiskās un praktiskās sagatavotības līmeņa, pieejamiem tehniskiem līdzekļiem, kā arī no uzdevuma mērķa. Šeit atzīmēsim tikai to, ka analītisko metožu lietošana ir visai ierobežota, jo elektromagnētiskā lauka diferenciālvienādojumu analītisku risinājumu var iegūt tikai samērā vienkāršos gadījumos, izdarot ļoti rupjus pieņēmumus attiecībā uz pētāmo objektu. Visaugstākā ticamības pakāpe ir eksperimentālajām pētīšanas metodēm, kas tiek veiktas reālam objektam reālos tā darbības apstākļos. Taču eksperimentālās pētīšanas metodes nevar izmantot projektēšanas stadijā, bet tikai jau pilnīgi izgatavotai mašīnai, kas daudzos gadījumos ir saistīts ar lieliem laika un materiāļajiem resursiem. Šodienas apstākļos visperspektīvākās ir elektromagnētiskā lauka vienādojumu skaitliskās risināšanas metodes, plaši izmantojot datortehniku. Šīs metodes salīdzinājumā ar analītiskajām metodēm ļauj maksimāli samazināt dažādus vienkāršojumus un pieņēmumus un tādējādi maksimāli tuvināt aprēķina modeli reālajai elektriskajai mašīnai. Izmantojot skaitliskās metodes, bez principiālām grūtībām ir iespējams pietiekami korekti un precīzi ievērot tādus faktoros, kā magnētiskās sistēmas elementu ģeometrisku konfigurāciju un magnētisko materiālu nelineārās raksturlīknes.

## 2. Elektromagnētiskā lauka vienādojumi (Maksvela vienādojumi)

### 2.1. Elektromagnētiskā lauka vienādojumu vispārīgā forma

Jebkuru elektromagnētisko lauku var aprakstīt ar Maksvela vienādojumiem, kuri nosaka elektriskā un magnētiskā lauka raksturojošo lielumu savstarpējās sakarības un saista to izmaiņu laikā un telpā. Ievērojot to, ka elektriskajās mašīnās izmantojamā frekvence ir neliela, kā arī lietojamo materiālu īpašības, var neņemt vērā nobīdes strāvas. Tad elektromagnētiskā lauka vienādojumu sistēma satur šādus četrus vienādojumus:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{j}}_a, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\bar{j} = \gamma(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}), \quad (3)$$

$$\bar{B} = \mu \bar{H}, \quad (4)$$

kur  $\bar{B}$  – magnētiskā lauka indukcija;  $\bar{H}$  magnētiskā lauka intensitāte;  $\bar{j}$  – strāvas blīvums;  $\bar{E}$  – elektriskā lauka intensitāte;  $\bar{v}$  – vides kustības relatīvais ātrums attiecībā pret magnētisko lauku;  $\gamma$  – elektriskā īpatvadītspēja;  $\mu$  – magnētiskā caurlaidība.

Vienādojumi (1) – (4) saista elektriskā lauka lielumus  $\bar{j}$  un  $\bar{E}$  ar magnētiskā lauka lielumiem  $\bar{B}$  un  $\bar{H}$  un izsaka to apstākli, ka magnētiskā lauka izmaiņa rada elektrisko lauku (vienādojums (2)), bet elektriskā lauka izmaiņa – magnētisko lauku (vienādojums (3)). Magnētiskā lauka pamatvienādojumu sistēmu var papildināt vēl ar vienādojumu

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0, \quad (5)$$

kas raksturo magnētiskās plūsmas nepārtrauktību.

Vienādojums (1) ir pilnās strāvas likums diferenciālajā formā. Strāvas blīvums šī vienādojuma labajā pusē ir izteikts ar divām komponentēm. Pirmā no šīm komponentēm  $\bar{j}$  ir inducētās strāva blīvums un tas ir atkarīgs no elektromagnētiskajiem procesiem pašā mašīnā, t.i., no magnētiskā lauka izmaiņas laikā un telpā, kā tas redzams no vienādojumiem (2) un (3). Otra komponente  $\bar{j}_a$  ir ārējās strāvas blīvums, kuru nosaka no mašīnas neatkarīgs ārējais avots. Magnētiskā lauka aprēķinos šī komponente ir uzdots zināms lielums.

Vienādojums (2) ir diferenciālajā formā izteikts elektromagnētiskās indukcijas likums.

Vienādojumā (3), kas ir elektriskās ķēdes Oma likums diferenciālajā formā, elektriskā lauka intensitāte sastāv no divām komponentēm. Izmantojot elektrisko mašīnu teorijā lietotos jēdzienus, pirmā no šīm komponentēm  $\bar{E}$  atbilst transformācijas elektrodzinējspēkam, kura cēlonis ir magnētiskā lauka izmaiņa laikā. Raksturīgs transformācijas elektrodzinējspēka piemērs ir EDS, kas inducējas transformatora tinumos, kur nekustīgus tinumus caurtver laikā mainīgs magnētiskais lauks. Otra elektriskā lauka intensitātes komponente  $\bar{v} \times \bar{B}$  atbilst rotācijas elektrodzinējspēkam, kura cēlonis ir vides pārvietošanās attiecībā pret magnētisko lauku. Šāda EDS raksturīgs piemērs ir līdzstrāvas mašīnas enkura tinumā inducētais EDS, kur telpā nekustīgā un laikā nemainīgā magnētiskajā laukā pārvietojas tinums, kas tādējādi faktiski ir pakļauts mainīga magnētiskā lauka iedarbībai.

Analizējot un pētot elektromagnētiskos laukus elektriskajās mašīnās, var izmantot gan elektromagnētiskā lauka teoriju, gan elektrisko un magnētisko ķēžu teoriju. Pirmajā gadījumā lauka aprēķinus veic, balstoties uz vienādojumiem (1) – (4), bet otrajā gadījumā izmanto atbilstošus vienādojumus integrālajā formā, t.i.,

$$\oint \bar{H} d\bar{l} = \sum i, \quad (6)$$

$$e = -\frac{d\Psi}{dt}, \quad (7)$$

$$i = \frac{\sum e}{R}, \quad (8)$$

$$\Phi = \frac{\sum F}{R_\mu}. \quad (9)$$

Šeit vienādojums (6) ir integrālā formā izteikts pilnā strāvas likums, kas izsaka to, ka magnētiskā lauka intensitātes vektora integrālis pa noslēgtu kontūru ir vienāds ar pilno strāvu, ko ietver šis kontūrs. Vienādojumā (7)  $\Psi$  ir plūsmas saķēdējums ar tinumu un vispārējā gadījumā to aprēķina kā

$$\Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_i + \dots + \Phi_w, \quad (10)$$

kur  $\Phi_i$  – magnētiskā plūsma, kas saķēdēta ar  $i$ -to vijumu;  $w$  – tinuma virknē slēgto vijumu skaits. Vienkāršākā gadījumā, kad visus vijumus caurtver viena un tā pati plūsma  $\Phi$ , plūsmas saķēdējums ir

$$\Psi = w\Phi. \quad (11)$$

Vienādojumi (8) un (9) izsaka Oma likumu integrālā formā attiecīgi elektriskajai un magnētiskajai ķēdei, kur  $\sum e$  – elektriskās ķēdes zara rezultējošais EDS,  $R$  – ķēdes zara pretestība,  $\sum F$  – magnētiskās ķēdes zara rezultējošais magnetizētājspēks,  $R_\mu$  – ķēdes zara magnētiskā pretestība.

Lietderīgi minēt vēl dažas sakarības, kas saista elektromagnētiskā lauka diferenciālos lielumus  $\vec{B}$  un  $\vec{j}$  ar integrālajiem lielumiem  $\Phi$  un  $i$ :

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (12)$$

$$i = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (13)$$

Ja kaut kādā aplūkojamā šķērsgriezumā  $S$  magnētiskā indukcija  $B = const$ , tad saskaņā ar (12)

$$\Phi = BS. \quad (14)$$

Līdzīgi, ja kaut kādā šķērsgriezumā  $S$  strāvas blīvums  $j = const$ , tad saskaņā ar (13)

$$i = jS. \quad (15)$$

Vienādojumi (1) – (4) uzrakstīti elektromagnētiskā lauka vektorāliem lielumiem simboliskā formā, kas tiešai risināšanai nav izmantojama. Tāpēc, risinot vienādojumus, tos piesaista noteiktai koordinātu sistēmai, aizstājot katru no vektoriem ar trim komponentēm un izvērstā veidā uzrakstot matemātisko operāciju “rot” un vektorālo reizinājumu “ $\times$ ”. Tad taisnleņķa koordinātu sistēmā  $xyz$  no vienādojumiem

(1) – (4) iegūstam šādu vienādojumu sistēmu:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j_x + j_{ax}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j_y + j_{ay}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j_z + j_{az}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad (21)$$

$$j_x = \gamma(E_x + v_y B_z - v_z B_y), \quad (22)$$

$$j_y = \gamma(E_y + v_z B_x - v_x B_z), \quad (23)$$

$$j_z = \gamma(E_z + v_x B_y - v_y B_x), \quad (24)$$

$$B_x = \mu H_x, \quad (25)$$

$$B_y = \mu H_y, \quad (26)$$

$$B_z = \mu H_z \quad (27)$$

un no vienādojuma (5) –

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (28)$$

Vienādojumu sistēma (16) – (27), kas satur divpadsmit vienādojumus ar divpadsmit nezināmajiem lielumiem, pilnībā apraksta elektromagnētisko lauku ar tā raksturlielumu attiecīgajām komponentēm. Šīs sistēmas atrisināšana, ievērojot robežnosacījumus, dod iespēju atrast visu elektromagnētiskā lauka raksturlielumu komponentes kā funkciju no trim telpiskām koordinātām ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) un laika koordinātas ( $t$ ).

## 2.2. Plakanparalēla elektromagnētiskā lauka vienādojumi

Pētot ar elektromagnētisko lauku saistītos enerģijas pārveidošanas pamatprocesus, kuri noris galvenokārt elektriskās mašīnas aktīvajā daļā, kā jau iepriekš tika atzīmēts, var pieņemt, ka lauks ir plakanparalēls. Tas nozīmē, ka strāvas blīvuma vektoram  $\vec{j}$  un ar to saistītam elektriskā lauka intensitātes vektoram  $\vec{E}$  ir tikai viena – aksiālā komponente, kuras virziens sakrīt ar rotācijas ass virzienu. Savukārt, magnētiskās indukcijas vektoram  $\vec{B}$  un un ar to saistītam magnētiskā lauka intensitātes vektoram  $\vec{H}$  ir tikai divas komponentes – radiālā un tangenciālā – jebkurā rotācijas asij perpendikulārā plaknē.



Izvēloties koordinātu asu orientāciju tā, lai  $x$  ass būtu vērsta tangenciālā virzienā,  $y$  ass – radiālā virzienā,  $z$  ass – aksiālā virzienā (1.zīm.), plakanparalēla lauka gadījumā atsevišķām vektoru  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{E}$  un  $\vec{v}$  komponentēm ir nulles vērtības, t.i.,

$$B_z = 0, \quad (29)$$

$$H_z = 0, \quad (30)$$

$$j_x = j_y = 0, \quad (31)$$

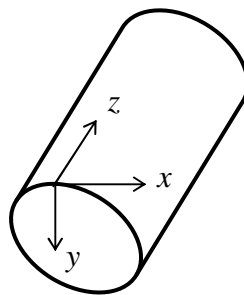
$$j_{ax} = j_{ay} = 0, \quad (32)$$

$$E_x = E_y = 0, \quad (33)$$

$$v_y = v_z = 0, \quad (34)$$

kā arī

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0. \quad (35)$$



1. zīm.

Ievērojot (29) – (35), vienādojumu sistēma (16) – (27) vienkāršojas un divpadsmit vienādojumu vietā iegūstam sešus vienādojumus:

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j_z + j_{az}, \quad (36)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad (37)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad (38)$$

$$j_z = \gamma(E_z + v_x B_y), \quad (39)$$

$$B_x = \mu H_x, \quad (40)$$

$$B_y = \mu H_y. \quad (41)$$

### 2.3. Vektoriālais magnētiskais potenciāls

Diferenciālvienādojumu sistēma (29) – (34) nav izmantojama tiešai risināšanai, jo katrs no vienādojumiem satur vairākus nezināmos lielumus ar to atvasinājumiem pēc  $x$ ,  $y$ ,  $t$ . Tādēļ ir lietderīgi ieviest palīglielumus, kas ļauj šo sistēmu pārveidot tā, lai

būtu iespējams izmantot klasiskās diferenciālvienādojumu risināšanas metodes. Pie šādiem palīglielumiem pieder skalārais un vektoriālais magnētiskais potenciāls, turklāt elektrisko mašīnu magnētisko lauku aprēķiniem vispiemērotākais ir pēdējais no tiem.

Vektoriālais magnētiskais potenciāls ir formāli ieviests nepārtraukti mainīgs vektoriāls lielums. No vektoru analīzes ir zināms, ka jebkuru vektoriālu lielumu, piemēram  $\bar{B}$ , kurš apmierina vienādojumu (5), var uzskatīt par kaut kāda cita vektoriāla lieluma rotoru, t.i.,

$$\bar{B} = \text{rot}\bar{A} . \quad (42)$$

Vektoru  $\bar{A}$  sauc par magnētiskā lauka vektoriālo potenciālu.

Izsakot magnētiskās indukcijas vektora  $\bar{B}$  komponentes ar vektoriālā magnētiskā potenciāla attiecīgajām komponentēm, izteiksmi (42) var aizstāt ar šādām izteiksmēm:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} ; \quad (43)$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} ; \quad (44)$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} . \quad (45)$$

Var pierādīt, ka plakanparalēla lauka gadījumā vektoriālajam magnētiskajam potenciālam ir tikai viena komponente (atbilstoši 1.zīm. izvēlētajai koordinātu sistēmai komponente  $A_z$ , bet  $A_x = A_y = 0$ ) un tāpēc vienādojumu (43) – (45) vietā iegūstam

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} , \quad (46)$$

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} . \quad (47)$$

Ar vektoriālo magnētisko potenciālu var izteikt arī visus pārējos elektromagnētiskā lauka raksturlielumus, t.i., vektorus  $\bar{H}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{E}$  un šo vektoru attiecīgās komponentes.

Magnētiskā lauka intensitātes vektora  $\bar{H}$  komponentes ar vektoriālo magnētisko potenciālu var izteikt, ievērojot izteiksmes (40), (41), (46), (47):

$$H_x = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y} , \quad (48)$$

$$H_y = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x} . \quad (49)$$

Elektriskā lauka intensitātes vektora  $\vec{E}$  vienīgo komponenti plakanparalēla lauka gadījumā  $E_z$  ar vektoriālo magnētisko potenciālu var izteikt, ievietojot izteiksmes (37) labajā pusē  $B_x$  vērtību no (46):

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} \right),$$

jeb

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_z}{\partial t} \right). \quad (50)$$

Ir zināms, ka gadījumā, ja divu funkciju atvasinājumi jebkurā punktā ir vienādi, tad šīs funkcijas viena no otras var atšķirties tikai par kaut kādu konstantu lielumu  $C$ . Elektromagnētiskā lauka gadījumā var pieņemt  $C = 0$ , jo tas nemaina magnētiskās indukcijas kā reāla fizikāla lieluma vērtību, kā tas izriet no (46) un (47). Ievērojot šo apstākli, no izteiksmes (50) iegūstam

$$E_z = -\frac{\partial A_z}{\partial t}. \quad (51)$$

Strāvas blīvuma vektora  $\vec{j}$  vienīgo komponenti plakanparalēla lauka gadījumā (komponenti  $j_z$ ) ar vektoriālo magnētisko potenciālu var izteikt, ievietojot izteiksmē (39)  $E_z$  no (51) un  $B_y$  no (47). Tad iegūstam

$$j_z = \gamma \left( -\frac{\partial A_z}{\partial t} - v_x \frac{\partial A_z}{\partial x} \right). \quad (52)$$

Vektoriālā magnētiskā potenciāla ieviešana ļauj izslēgt no vienādojumu sistēmas (36) – (41) visus nezināmos lielumus ( $B_x$ ,  $B_y$ ,  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $j_z$ ,  $E_z$ ) un pašu vienādojumu sistēmu aizstāt ar vienu diferenciālvienādojumu, kas satur tikai vienu nezināmo lielumu – vektoriālā magnētiskā potenciāla komponenti  $A_z$ , kuru vienkāršības dēļ turpmāk apzīmēsim ar  $A$ . Lai iegūtu šādu diferenciālvienādojumu, vispirms vienādojumā (36) ievietosim  $H_x$ ,  $H_y$  un  $j_z$  attiecīgi no vienādojumiem (48), (49) un (52):

$$-\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \gamma \left( -\frac{\partial A}{\partial t} - v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + j_a,$$

kur vienkāršības dēļ vektoru  $\vec{v}$  un  $\vec{j}_a$  vienīgās komponentes  $v_x$  un  $j_{az}$  apzīmētas attiecīgi ar  $v$  un  $j_a$ .

Pārveidojot šo vienādojumu, iegūstam

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \mu\gamma \frac{\partial A}{\partial t} - \mu\gamma v \frac{\partial A}{\partial x} = -\mu j_a. \quad (53)$$

Vienādojums (53) ir otrās kārtas parciālo atvasinājumu diferenciālvienādojums, kura atrisinājumam ir jāapmierina divi uzdotie robežnosacījumi un viens sākumnosacījums.

Vispārējā gadījumā vienādojumu (53) var risināt gan ar analītiskajām, gan skaitliskajām metodēm. Tomēr, risinot reālus elektromagnētiskā lauka uzdevumus elektriskajās mašīnās, priekšroka dodama skaitliskajām metodēm, kuras ļauj ievērojami samazināt dažādus vienkāršojumus un pieņēmumus uzdevuma nostādņē un tādējādi iegūt ticamākus un precīzākus rezultātus. Risinot vienādojumu (53) ar analītiskajām metodēm, atrisinājumu iegūst nepārtrauktas analītiskas funkcijas  $A(x, y, t)$  veidā, bet risinot ar skaitliskajām metodēm – kā  $A$  vērtības fiksētos plaknes punktos  $x_i, y_i$  fiksētiem laika momentiem  $t_k$ , t.i., kā vērtību  $A_{i,k}(x_i, y_i, t_k)$  kopu, kas faktiski nozīmē funkcijas  $A(x, y, t)$  uzdošanu tabulas veidā.

Ar diferenciālvienādojumu (53) var aprakstīt elektromagnētisko lauku jebkurā elektriskajā mašīnā jebkurā tās darbības režīmā, ja ir zināmi lielumi  $\mu, \gamma, \nu$ , kā arī ārējās strāvas blīvuma sadalījums  $j_a(x, y)$ . Pētot elektromagnētisko lauku dažāda tipa mašīnām atsevišķos speciālos gadījumos un režīmos, šis vienādojums attiecīgi vienkāršojas. Tā, piemēram, aprēķinot elektromagnētisko lauku transformatoros vai citās statiskās elektromagnētiskās ierīcēs (magnētiskajos pastiprinātājos, elektromagnētiskajos komutācijas aparātos, droselēs u.tml.),  $\nu = 0$  un vienādojuma (53) vietā iegūstam

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \gamma \frac{\partial A}{\partial t} = -\mu j_a. \quad (54)$$

Aprēķinot elektromagnētisko lauku līdzstrāvas mašīnas enkūrā, kurš pārvietojas attiecībā pret telpā nekustīgu un laikā nemainīgu ierosmes polu lauku,  $\partial/\partial t = 0$  un lauka aprēķinam izmantojams vienādojums

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial A}{\partial x} = -\mu j_a. \quad (55)$$

Savukārt, stacionāra magnētiskā lauka aprēķināšanai, piemēram, līdzstrāvas mašīnas statorā, kur  $\nu = 0$  un  $\partial/\partial t = 0$ , iegūstam vienādojumu

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -\mu j_a, \quad (56)$$

kas matemātikā pazīstams kā Puasona vienādojums.

Un, visbeidzot, aprēķinot stacionāru magnētisko lauku apgabalā, kurš nesatur magnētiskā lauka avotus,  $j_a = 0$ , un risināmais vienādojums ir

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0, \quad (57)$$

ko sauc par Laplasa vienādojumu.

Kā jau tika atzīmēts, magnētiskā lauka aprakstīšanai vispārīgā gadījumā izmantojams vienādojums (53), kas ievēro gan elektromagnētiskā lauka izmaiņu laikā, gan vides kustību magnētiskajā laukā. Tomēr tas apstākļi, ka vienādojums satur locekļus  $-\gamma \partial A / \partial t$  un  $-\gamma v \partial A / \partial x$  būtiski sarežģī pašu risināšanas procesu. Tajā pašā laikā ļoti daudzos gadījumos nestacionāra elektromagnētiskā lauka ( $\partial / \partial t \neq 0$ ,  $v \neq 0$ ) risināšanas uzdevumu var reducēt uz vairākiem vienkāršākiem uzdevumiem, kuros elektromagnētisko lauku apraksta ar vienādojumu (56) vai (57). Šāda uzdevuma nostādne pamatojas uz to, ka laikā mainīgu procesu ( $\partial / \partial t \neq 0$ ) var aplūkot kā atsevišķu stacionāru procesu kopumu dažādos secīgos laika momentos  $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n$ . Tā, piemēram, ja lauka avota strāvas blīvums ir sinusoidāla laika funkcija  $j_a(t) = j_{am} \sin \omega t$ , tad vienādojumu (57) risina  $n$  reizes, katru reizi tā labajā pusē uzdodot attiecīgajam laika momentam atbilstošās strāvas blīvuma  $j_a$  momentānās vērtības  $j_a(t_1) = j_{am} \sin \omega t_1$ ,  $j_a(t_2) = j_{am} \sin \omega t_2, \dots$ ,  $j_a(t_i) = j_{am} \sin \omega t_i$ ,  $\dots$ ,  $j_a(t_n) = j_{am} \sin \omega t_n$ . Šādu uzdevumu risināšanas rezultātā iegūstam vektoriāla potenciāla vērtības  $A(t_1), A(t_2), \dots, A(t_i), \dots, A(t_n)$ , kuru kopumu var uzskatīt par tabulas veidā uzdotu funkcionālu sakarību  $A = f(t)$ . Līdzīga pieeja izmantojama, risinot nestacionāru uzdevumu, kad  $v \neq 0$ , kas saistīts ar vides kustību magnētiskajā laukā vai magnētiskā lauka kustību attiecībā pret nekustīgu vidi (piemēram, līdzstrāvas mašīnas rotora rotāciju attiecībā pret nekustīgu ierosmes polu lauku, sinhronās mašīnas ierosināta rotora rotāciju attiecībā pret statoru). Šajā gadījumā risina virkni stacionāru uzdevumu, katrs no kuriem atbilst dažādiem secīgiem rotora stāvokļiem.

## 2.4. Elektromagnētiskā lauka raksturlielumu noteikšana ar vektoriālo magnētisko potenciālu

Tā kā vektoriālais magnētiskais potenciāls ir tikai palīglielums (starplielums), tad aprēķinot dažādus elektromagnētiskā lauka raksturlielumus, var izmantot izteiksmes (46) – (49), (51), (52), ievērojot, ka plakanparalēlā laukā  $A_z = A$ . Turklāt, ja diferenciālvienādojums risināts ar skaitliskām metodēm, atbilstoši jāizmanto skaitliskās diferencēšanas metodes (sk. [1]).

Ļoti bieži elektrisko mašīnu dažādu raksturlielņu praktiskos aprēķinos svarīgi ir zināt nevis magnētiskās indukcijas un magnētiskā lauka vektoru komponentes, bet šo vektoru moduļus, kurus var aprēķināt attiecīgi ar formulām

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}, \quad (58)$$

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2}. \quad (59)$$

Tāpat praktiskos aprēķinos bieži jānosaka magnētiskā plūsma  $\Phi$ , kas iziet caur kaut kādu šķērsgriezumu  $S$ . Šajā gadījumā var izmantot formulu (12). Tomēr šīs formulas lietošana ir saistīta ar zināmām grūtībām, jo vispirms no vektoriālā potenciāla  $A$  ar analītisku vai skaitlisku diferencēšanu jāatrod  $B_x$  un  $B_y$  un pēc tam jāintegrē pa visu laukumu  $S$ . Ievērojami vienkāršāk magnētiskā plūsma  $\Phi$  ir

aprēķināma tieši no vienādojuma risināšanas rezultātā iegūtajām vektoriālā potenciāla vērtībām. Šāda aprēķināšana pamatojas uz Stoksa teorēmu, saskaņā ar kuru

$$\int_S \bar{B} d\bar{S} = \oint_L \bar{A} d\bar{l}, \quad (60)$$

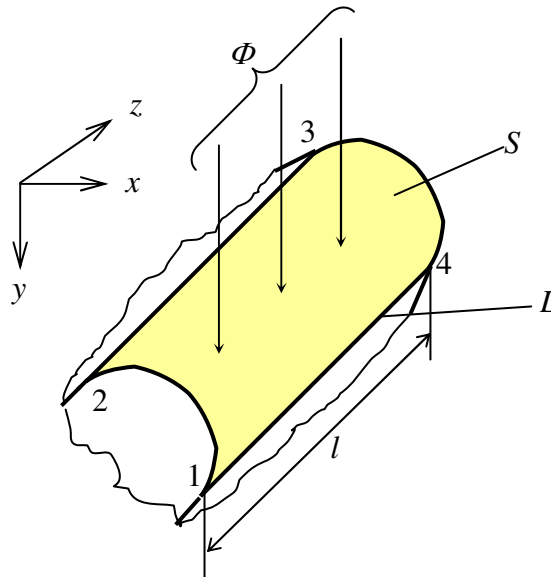
kur  $L$  – noslēgts integrēšanas kontūrs, kas aptver laukumu  $S$ .

Plakanparalēla lauka gadījumā līnijintegrāļa  $\oint_S \bar{A} d\bar{l}$  aprēķināšana ievērojami vienkāršojas. Pieņemsim, ka jāaprēķina magnētiskā plūsma, kas iet caur laukumu  $S$  uz cilindriskas virsmas (piemēram, uz elektriskās mašīnas rotora virsmas) (2.zīm.), un vektoriālais potenciāls noteikts plakanparalēlam laukam jebkurā plaknes  $xy$  punktā. Virsmu  $S$  ierobežo divas taisnes 2-3, 4-1, kuru garums ir  $l$ , un divi loki 1-2, 3-4. Integrāļa (60) labo pusi var aizstāt ar četru integrāļu summu:

$$\Phi = \int_1^2 \bar{A} d\bar{l} + \int_2^3 \bar{A} d\bar{l} + \int_3^4 \bar{A} d\bar{l} + \int_4^1 \bar{A} d\bar{l}, \quad (61)$$

kur elementa  $d\bar{l}$  virziens sakrīt ar aplūkojamā kontūra  $L$  malu virzieniem, bet  $\bar{A}$  ir vektoriālā potenciāla vērtība patvaļīgā punktā uz kontūra  $L$  malām. Reizinājums  $\bar{A} d\bar{l}$  zem integrāļa zīmes ir vektoru  $\bar{A}$  un  $d\bar{l}$  skalārais reizinājums, kuru var izteikt kā

$$\bar{A} d\bar{l} = A \cdot dl \cdot \cos(\bar{A} \wedge d\bar{l}).$$



2. zīm.

Ievērojot to, ka plakanparalēla lauka gadījumā  $\bar{A} = A_z = A$  (sk. iepriekš), kā arī to, ka uz kontūra malām 2-3 un 4-1  $\cos(\bar{A} \wedge d\bar{l}) = 1$  (šeit leņķis starp vektoriem  $\bar{A}$  un  $d\bar{l}$  ir  $0^0$ ), bet uz kontūra malām 1-2 un 3-4  $\cos(\bar{A} \wedge d\bar{l}) = 0$  (šeit leņķis starp vektoriem  $\bar{A}$  un  $d\bar{l}$  ir  $90^0$ ), izteiksmes (61) vietā var uzrakstīt

$$\Phi = \int_2^3 A dl + \int_4^1 A dl . \quad (62)$$

Tā kā plakanparalēla lauka gadījumā  $\partial A/\partial z = 0$ , tad vektoriālajam potenciālam uz jebkuras no līnijām 2-3 un 4-1 ir konstanta vērtība, turklāt  $A_3 = A_2$  un  $A_4 = A_1$ , un tad izteiksmes (62) vietā iegūstam

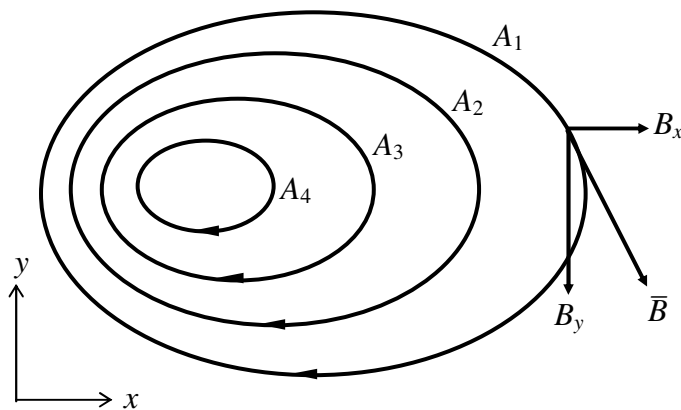
$$\Phi = A_2 \int_2^3 dl - A_1 \int_1^4 dl ,$$

jeb

$$\Phi = (A_2 - A_1)l . \quad (63)$$

Tādējādi plakanparalēla lauka gadījumā izteiksmes (12) vietā, kuras labajā pusē ir jāaprēķina virsmas integrālis, magnētiskās plūsmas noteikšanai iespējams izmantot daudz vienkāršāku izteiksmi (63), kurā magnētiskā plūsma ir izteikta ar vektoriālā potenciāla starpību divos plaknes punktos.

Lietderīgi atzīmēt vēl vienu vektoriālā potenciāla  $A$  īpašību, kura ļauj novērtēt magnētiskā lauka raksturu. Pieņemsim, ka atrisinot diferenciālvienādojumu, piemēram, vienādojumu (56) ir atrasts vektoriālā potenciāla sadalījums plaknē  $xy$  kā koordinātu  $x, y$  funkcija, t.i.,  $A(x, y)$ . Ja šajā plaknē savieno punktus ar vienādām vektoriālā potenciāla vērtībām, iegūst nepārtrauktas līnijas, kuras sauc par ekvipotenciālajām līnijām, jeb ekvipotenciālēm. Šīs līnijas vienlaikus ir magnētiskās spēka līnijas. Jebkurā spēka līnijas (evipotenciāles) punktā novilkta pieskare sakrīt ar magnētiskās indukcijas vektora  $\vec{B}$  virzienu šajā punktā (3.zīm.). Magnētisko spēka līniju kopums dod magnētiskā lauka uzskatāmu ainu, un no šīs lauka ainas var spriest par magnētiskā lauka raksturu (orientāciju, lauka sablīvējumu vai retinājumu u.tml.). Piemēram, magnētisko spēka līniju sablīvējums kaut kādā zonā raksturo to, ka šajā zonā ir palielināta magnētiskās indukcijas vērtība.



3. zīm.

### 3. Robežnosacījumi

#### 3.1. Vispārīgi jēdzieni

Risinot parciālo atvasinājumu diferenciālvienādojumu noteiktā apgabalā, ir nepieciešami papildus nosacījumi uz šī apgabala robežām, ko sauc par

robežnosacījumiem. Robežnosacījumi izriet no fizikālajiem procesiem konkrētā objektā noteiktos tā darbības apstākļos.

Izšķir pirmā, otrā un trešā veida robežnosacījumus. Pirmā veida robežnosacījumi ir tad, ja uz apgabala robežām uzdotas meklējamās funkcijas (dotajā gadījumā vektoriālā magnētiskā potenciāla  $A$ ) vērtības. Pirmā veida robežnosacījumus var uzdot tiešā vai netiešā formā. Robežnosacījumus tiešā formā uzdod, ja uz kādas no apgabala robežām ir zināmas vektoriālā potenciāla skaitliskās vērtības. Tā, piemēram, 4. zīmējumā attēlotajā aprēķina apgabalā uz apgabala robežām 1, 2, 3, 4 tiešā formā var būt uzdoti šādi pirmā veida robežnosacījumi:

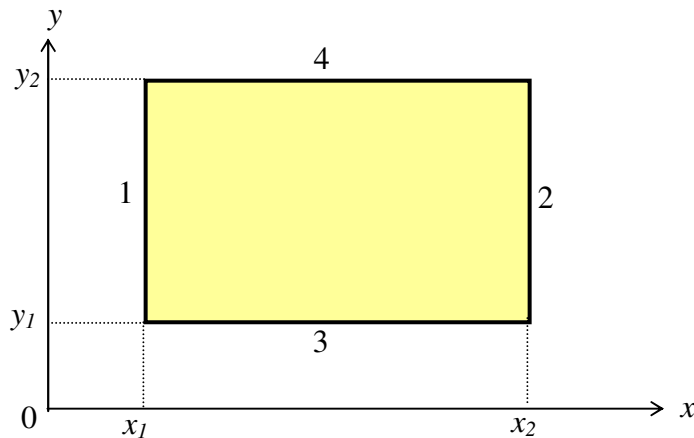
$$1 \quad A_1|_{x=x_1} = f_1(y);$$

$$2 \quad A_2|_{x=x_2} = f_2(y);$$

$$3 \quad A_3|_{x=x_3} = f_3(x);$$

$$4 \quad A_4|_{x=x_4} = f_4(x),$$

kur  $f_1(y)$ ,  $f_2(y)$ ,  $f_3(x)$ ,  $f_4(x)$  – zināmas  $x$  un  $y$  funkcijas, kurām atsevišķos gadījumos var būt konstantas vērtības, tajā skaitā nulles vērtības.



4. zīm.

Robežnosacījumi netiešā formā ir uzdodami tad, ja uz kaut kādām divām robežām skaitliskās vērtības nav zināmas, bet ir zināma to sakarība. Tā, piemēram, aprēķina apgabalā, kas attēlots 4. zīmējumā, netiešā formā var būt uzdoti šādi pirmā veida robežnosacījumi:

$$1 - 2 \quad A_1|_{x=x_1} = k A_2|_{x=x_2};$$

$$3 - 4 \quad A_3|_{y=y_1} = k A_4|_{y=y_2}$$

kur  $k \in (1, -1)$ .

Otrā veida robežnosacījumi ir tad, ja uz apgabala robežām uzdotas meklējamās funkcijas (dotajā gadījumā vektoriālā magnētiskā potenciāla  $A$ ) atvasinājuma vērtības normāles virzienā. Tā, piemēram, 4. zīmējumā attēlotajam aprēķina apgabalā var būt uzdoti šādi otrā veida robežnosacījumi:

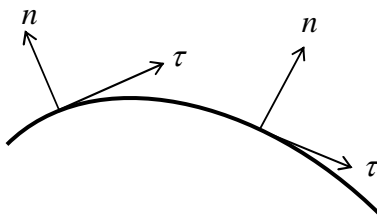


$$\begin{aligned}
 1 \quad \left. \frac{\partial A_1}{\partial x} \right|_{x=x_1} &= \varphi_1(y); \\
 2 \quad \left. \frac{\partial A_2}{\partial x} \right|_{x=x_2} &= \varphi_2(y); \\
 3 \quad \left. \frac{\partial A_3}{\partial y} \right|_{y=y_1} &= \varphi_3(x); \\
 4 \quad \left. \frac{\partial A_4}{\partial y} \right|_{y=y_2} &= \varphi_4(x).
 \end{aligned}$$

Vispārīgā gadījumā aprēķina apgabalam var būt uzdoti jaukti robežnosacījumi, t.i., uz kaut kādām robežām pirmā veida (tiešā vai netiešā formā), bet uz citām robežām – otrā veida robežnosacījumi.

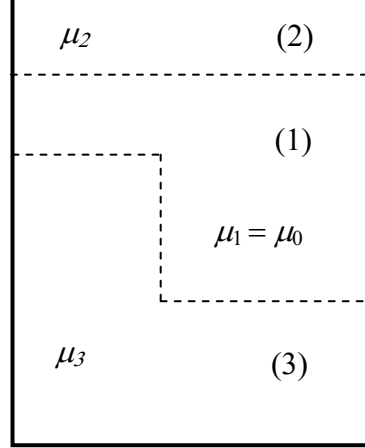
Trešā veida robežnosacījumi ir tad, ja uz robežām uzdota pirmā un otrā robežnosacījumu lineāra kombinācija. Elektromagnētiskā lauka aprēķinos ar šāda veida robežnosacījumiem neiznāk saskarties, tāpēc tos sīkāk šeit neiztirzāsim.

4. zīmējumā aplūkots apgabals ar ģeometriski vienkāršas formas robežām, ko veido taisnes nogriežņi, kuru virzieni sakrīt ar koordinātu asu virzieniem. Reālos uzdevumos apgabala robežu veido dažādi orientētu jebkuras formas līniju kombinācija. Sakarā ar to robežnosacījumu definēšanas veids, kas izmantots iepriekšējos piemēros koordinātās  $x$  un  $y$ , šajos gadījumos nav piemērojams. Tāpēc lietderīgi ir ieviest mobilās koordinātas  $\tau$  un  $n$ , kur  $\tau$  ir pieskare, bet  $n$  – normāle robežas kaut kādā punktā (5. zīm.). Var atzīmēt, ka mobilās koordinātas būtībā ir līklīniju koordinātas, kas piesaistītas patvaļīgas formas robežas dažādiem punktiem.



5. zīm.

Elektrisko mašīnu elektromagnētiskā lauka uzdevumos aprēķina apgabals sastāv no vairākiem apakšapgabaliem, kurus vienu no otra atdala iekšējās robežas un kuru magnētiskās īpašības ir dažādas (6. zīm.). Šajā gadījumā robežnosacījumi ir jāuzdod gan uz ārējām, gan iekšējām robežām.

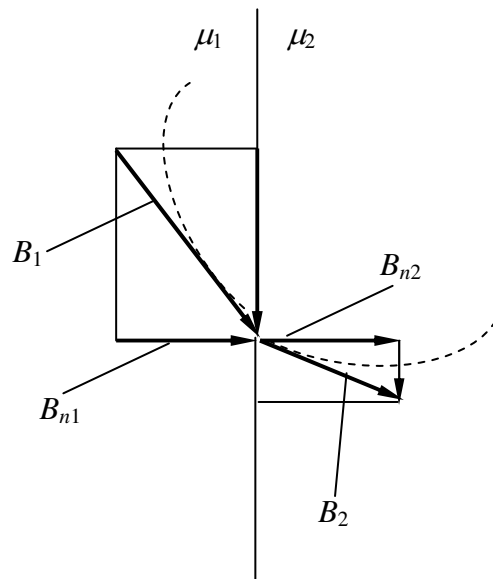


————— ārējās robežas  
 - - - - - iekšējās robežas

6. zīm.

No elektromagnētiskā lauka teorijas [4] ir zināms, ka, šķērsojot robežu, kura atdala vides ar dažādām magnētiskām īpašībām, magnētiskajai spēka līnijai (pārtrauktā līnija 7. zīmējumā) ir laužums. Šī iemesla dēļ magnētiskās indukcijas un magnētiskā lauka intensitātes vektori uz robežas starp divām dažādām vidēm ar  $\mu_1$  un  $\mu_2$  maina savu virzienu (7., 8. zīm.). Ir pierādīts (sk. [4]), ka uz robežas magnētiskās indukcijas vektora normālā komponente ir nepārtraukta, t.i., nemaina savu vērtību (7. zīm.):

$$B_{n1} = B_{n2}. \quad (64)$$



7. zīm.

Tāpat uz robežas ir nepārtraukta un nemaina savu vērtību magnētiskā lauka intensitātes vektora tangenciālā komponente (8. zīm.):

$$H_{\tau 1} = H_{\tau 2}. \quad (65)$$

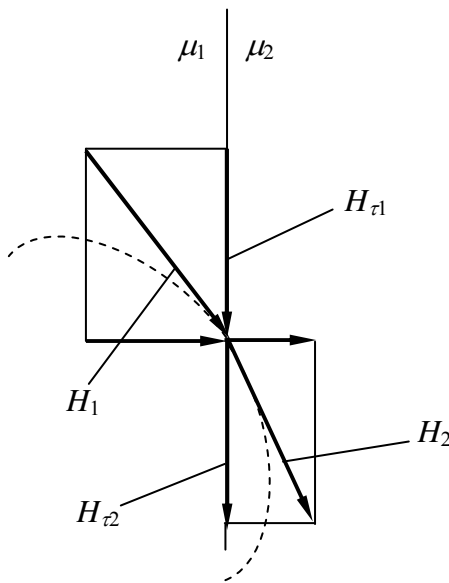
Izmantojot robežnosacījumus vienādojumu (56) vai (57) risināšanai, izteiksmēs (64) un (65) magnētiskā indukcija un lauka intensitāte jāizsaka ar vektoriālo magnētisko potenciālu. Šim nolūkam izmantosim mobilās koordinātas  $\tau, n$  un izteiksmes (46) – (49), kuras dotas  $x, y$  koordinātās. Tā kā abas šīs koordinātu sistēmas ir ortogonālas sistēmas, tad mobilajā koordinātu sistēmā var uzrakstīt šādus vienādojumus:

$$B_n = \frac{\partial A}{\partial \tau}; \quad (66)$$

$$B_\tau = -\frac{\partial A}{\partial n}; \quad (67)$$

$$H_n = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial \tau}; \quad (68)$$

$$H_\tau = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial n}. \quad (69)$$



8. zīm.

No izteiksmēm (64) un (66) izriet, ka

$$\frac{\partial A_1}{\partial \tau} = \frac{\partial A_2}{\partial \tau}. \quad (70)$$

Ja divu funkciju atvasinājumi ir vienādi, tad šīs funkcijas var atšķirties tikai par kaut kādu patvaļīgu konstanti  $C$ , kuru šajā gadījumā var pieņemt par nulli. Tad vienādojuma (70) vietā iegūstam

$$A_1 = A_2, \quad (71)$$

t.i., vektoriālais potenciāls uz robežas ir nepārtraukts.

Savukārt, izmantojot izteiksmes (65) un (69), var atrast, ka

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial n} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial n}, \quad (72)$$

t.i., vektoriālā potenciāla atvasinājums normāles virzienā mainās ar lēcieni.

Var atzīmēt, ka ar vienādību (71) tiek uzdoti pirmā veida, bet ar vienādību (72) – otrā veida robežnosacījumi.

### 3.2. Robežnosacījumu realizācijas īpatnības elektrisko mašīnu magnētiskā lauka aprēķina uzdevumos

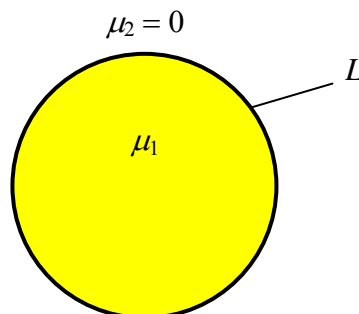
Ar izteiksmēm (71) un (72) uzdoto un vispārīgām gadījumam atbilstošo robežnosacījumu ievērošana, risinot reālus uzdevumus elektriskajās mašīnās, ir saistīta ar vairākām elektrisko mašīnu īpatnībām. Galvenās no tām ir šādas:

- mašīnas magnētiskā sistēma satur elementus, kuru magnētiskās īpašības ir ievērojami atšķirīgas, piemēram, gaiss, feromagnētiska vide;
- magnētiskā lauka sadalījumam ir periodisks raksturs, t.i., lauka aina atkārtojas ar periodu  $2\tau_p$ , kur  $\tau_p$  – pola iedaļa;
- magnētiskā lauka aina ir simetriska attiecībā pret noteiktām asīm, piemēram, polu asi, garenasi  $d$ , šķērsasi  $q$ .

Ievērojot minētās, kā arī vēl citas īpatnības, daudzos gadījumos ir iespējams ievērojami vienkāršot robežnosacījumu uzdošanu, izejas datu sagatavošanu, pašu uzdevumu risināšanas procesu un rezultātu apstrādi. It sevišķi tas attiecas uz skaitlisko metožu izmantošanu, kad datorā ievadāmās informācijas apjoms, kā arī rezultātu apstrādei nepieciešamais izvadāmās informācijas apjoms ir tieši atkarīgs no aprēķina apgabala izvēles.

#### Robeža starp vidēm ar ievērojami atšķirīgām magnētiskajām caurlaidībām.

1. Ja robežojas vides ar  $\mu_1 \gg \mu_2$ , piemēram, feromagnētiska vide – gaiss, tad tuvināti var pieņemt, ka  $\mu_2 = 0$ . Šāds tuvinājums ļauj ierobežot aprēķina apgabalu ar robežu, kas sakrīt ar elektriskās mašīnas šķērsgrīzumu aptverošo līniju  $L$ , kura atdala mašīnu no apkārtējās vides (9. zīm.).



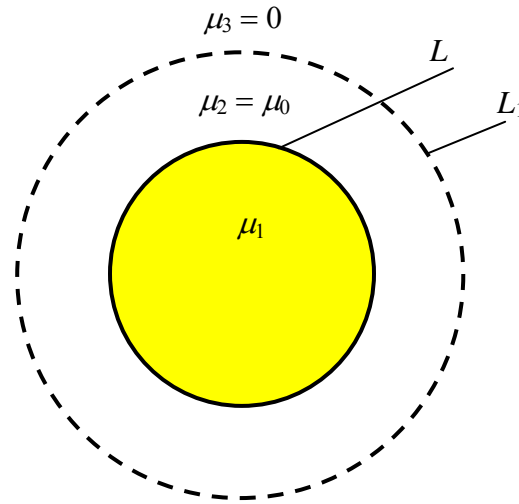
9. zīm.

Fizikāli šāds pieņēmums nozīmē, ka magnētiskais lauks koncentrējas mašīnā un neiziet ārpus tās, jeb tas nozīmē, ka uz robežas  $L$  magnētiskā indukcijas normālā

komponente  $B_n = 0$  (magnētiskās spēka līnijas iet gar robežu). Saskaņā ar izteiksmi (66) uz šīs robežas  $\frac{\partial A}{\partial \tau} = 0$  jeb  $A = \text{const}$ . Tāpēc uz ārējās robežas var pieņemt jebkuru nemainīgu vektoriālā potenciāla vērtību, tajā skaitā

$$A = 0. \quad (73)$$

Īstenībā magnētiskais lauks, kaut arī vājš, pastāv ārpus mašīnas. Šī lauka neievērošana ( $B_n = 0$  uz robežas  $L$ ) praktiski neietekmē lauka raksturu pašas mašīnas iekšienē. Tomēr atsevišķos gadījumos, piemēram, ja interesē elektriskās mašīnas radītā magnētiskā lauka ietekme uz objektiem, kas atrodas tiešā tās tuvumā (mēraparāti, elektroniskās ierīces u.c.), pieņēmums  $B_n = 0$  neļauj novērtēt šo ietekmi. Tāpēc vispārējā gadījumā šo ārpus mašīnas pastāvošo lauku var aprēķināt, ieviešot kaut kādu mākslīgu robežu  $L_1$  (10. zīm.), aiz kuras ar pietiekamu precizitāti var pieņemt, ka magnētiskais lauks nepastāv, t.i., magnētiskās indukcijas vērtība nepārsniedz aprēķinos pieļaujamo kļūdu. Šajā gadījumā nosacījums (73) ir jāuzdod uz robežas  $L_1$ .



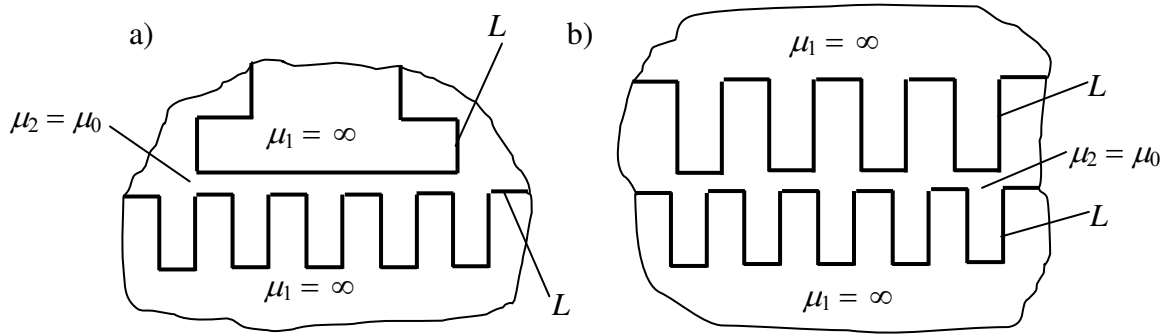
10. zīm.

Tādējādi, ja kādā no robežas pusēm  $\mu = 0$ , uz šādas robežas tiek uzdoti nullvērtības pirmā veida robežnosacījumi, t.i.,  $A = 0$ .

2. Otrs gadījums, ja  $\mu_1 \gg \mu_2$  attiecas uz robežu gaiss – feromagnētiska vide, kad pieņem  $\mu_1 = \infty$ . Šādu pieņēmumu lietderīgi izmantot, pētot, piemēram, zobu zonas vai polu ģeometrijas ietekmi uz magnētiskā lauka sadalījumu gaisa spraugā (11. zīm.).

Tad uz robežām  $L$  var izmantot nosacījumus (65) vai (72). Piemēram, saskaņā ar (72), ja  $\mu_1 = \infty$ , uz šīm robežām

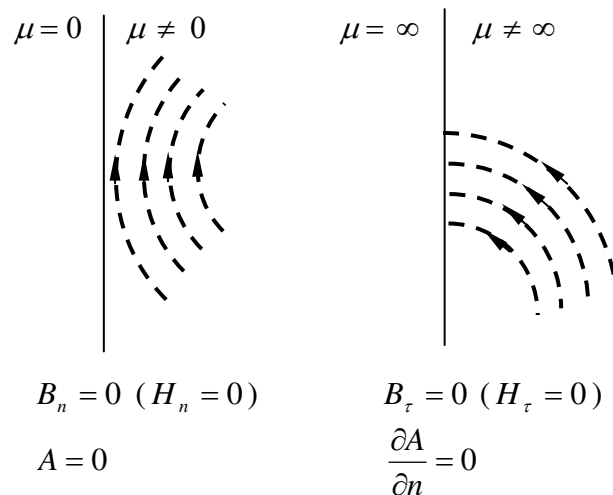
$$\frac{\partial A}{\partial n} = 0. \quad (74)$$



11. zīm.

Tādējādi uz robežām  $L$  ir uzdodami nullvērtības otrā veida robežnosacījumi. Fizikāli tas nozīmē, ka uz apgabala robežas magnētiskā lauka intensitātes tangenciālā komponente  $H_\tau = 0$  un tāpat arī magnētiskās indukcijas tangenciālā komponente  $B_\tau = 0$ , un magnētiskās spēka līnijas robežu šķērso taisnā leņķī. Šajā gadījumā aprēķina apgabalu var ierobežot ar vidi, kurā  $\mu_2 = \mu_0$ .

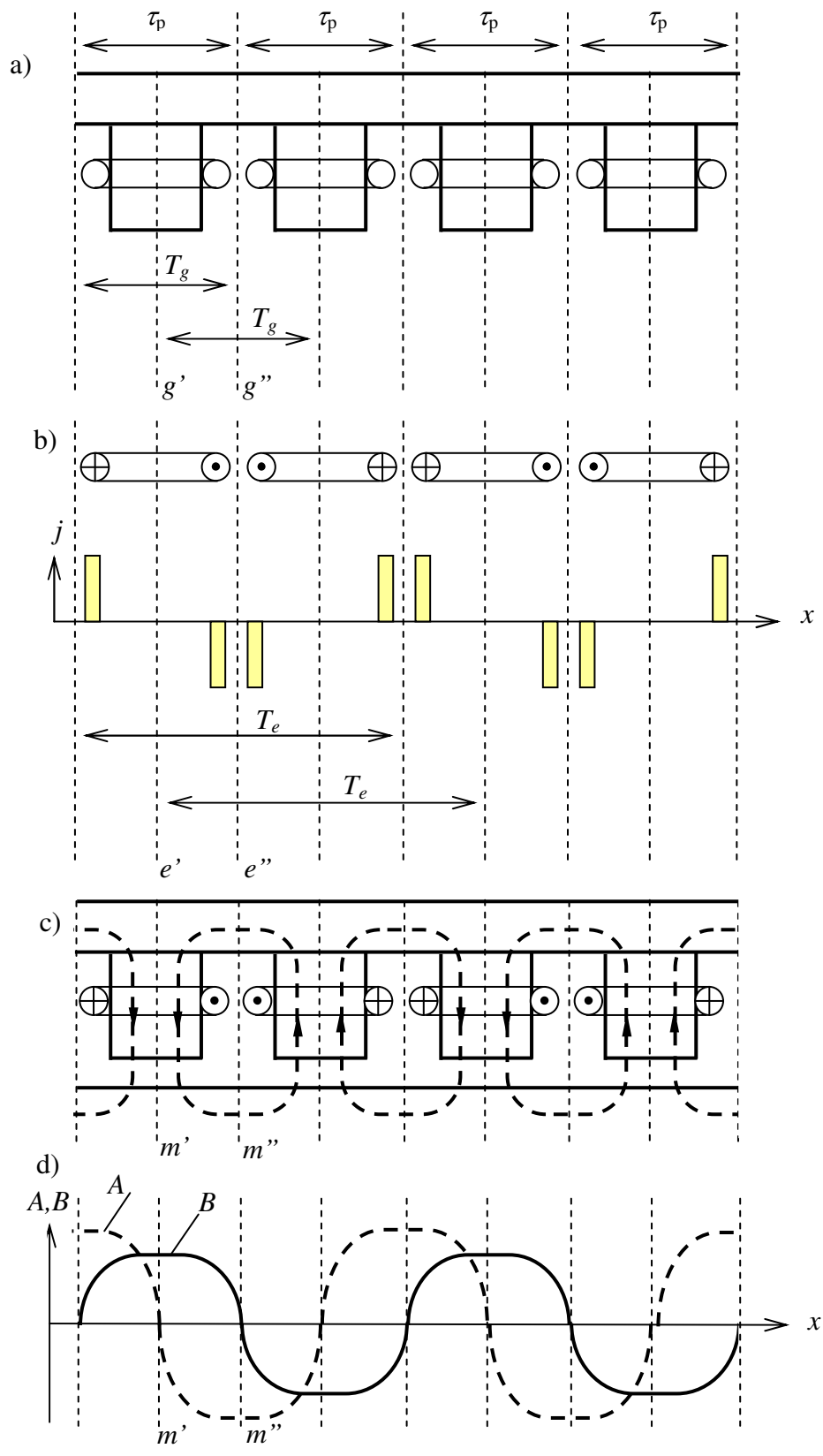
Iepriekš aplūkoti divi gadījumi, kad  $\mu = 0$  un  $\mu = \infty$  saistībā ar magnētiskā lauka ainu attēloti 12. zīmējumā.



12. zīm.

### Magnētiskā lauka simetrija un periodiskums.

Magnētiskā lauka aprēķina apgabala ierobežošana ir iespējama un robežnosacījumu uzdošana vienkāršojas, ja ievēro elektriskās mašīnas magnētiskā lauka simetriju un periodiskumu. Magnētiskā lauka simetriju un periodiskumu nosaka magnētiskās sistēmas ģeometrija un lauka avotu (tinumu strāvu) sadalījums. Tā, piemēram, no 13. zīm. a, kur attēloti daudzpolu līdzstrāvas mašīnas statora četri poli, redzams, ka katram polam atbilst divas ģeometriskās simetrijas ass – pola ass  $g'$  un starppolu ass  $g''$ , turklāt polu konstrukciju raksturojošie elementi atkārtojas ar ģeometrisko periodu  $T_g$ , kas šajā gadījumā vienāds ar pola iedaļu:  $T_g = \tau_p$ .



13. zīm.

Lauka avotu simetrijas un periodiskuma (elektriskās simetrijas un periodiskuma) raksturs (13. zīm. b) ir citāds, nekā ģeometriskās simetrijas un

periodiskuma raksturs, un elektriskais periods  $T_e$ , kas raksturo strāvas blīvuma  $j$  sadalījumu  $j$  sadalījumu, ir vienāds ar divkāršu pola iedaļu:  $T_e = 2\tau_p$ . Savukārt, simetrija izpaužas tādējādi, ka pastāv divas simetrijas ziņā dažādas assis  $e'$  un  $e''$ . Vienādos attālumos uz abām pusēm no ass  $e''$  strāvas blīvuma skaitliskās vērtības un virzieni ir vienādi, bet vienādos attālumos uz abām pusēm no ass  $e'$  skaitliskās vērtības ir vienādas, bet ar pretēju zīmi. Ievērojot šīs īpatnības, assis  $e'$  turpmāk nosauksim par antisimetrijas asīm, bet assis  $e''$  – par simetrijas asīm. No strāvas blīvuma sadalījuma (13. zīm. b) un polu ģeometrijas (13. zīm. a) ir atkarīgs magnētiskā lauka raksturs mašīnā (13. zīm.c). 13. zīm. d attēlots gaisa spraugas magnētiskās indukcijas normālās komponentes  $B_n$  sadalījums uz enkura virsmas, kā arī vektorālā potenciāla  $A$  sadalījums uz šīs virsmas, kas var tikt iegūts, pamatojoties uz izteiksmi (46) vai (66).

No 13. zīm. c un d var secināt, ka magnētiskā lauka sadalījumam arī ir simetrisks un periodisks raksturs un tādēļ arī šeit lietderīgi izmantot simetrijas un antisimetrijas asu jēdzienus. Šīs assis ir noteiktas ar iepriekšminētajām ģeometriskās un elektriskās simetrijas asīm un ir magnētiskā lauka antisimetrijas ( $m'$ ) un simetrijas ( $m''$ ) assis.

Simetrijas un antisimetrijas asu ieviešana ļauj izvēlēties aprēķina apgabalu tā, lai šī apgabala robežas no divām pusēm būtu simetrijas vai antisimetrijas assis un tādējādi daudzpolu mašīnā ierobežot aprēķina apgabalu tikai ar magnētiskā lauka vienu periodu, magnētiskā lauka vienu pusperiodu vai vienu ceturtdaļperiodu (sīkāk sk. 3.3). Pamatojoties uz 13. zīm. c un d attēloto magnētiskā lauka ainu un magnētiskās indukcijas sadalījumu, uz simetrijas un antisimetrijas asīm ir uzdodami šādi robežnosacījumi.

Uz antisimetrijas ass  $B_n = 0$ , jo magnētiskās spēka līnijas šo asi nešķērso. Tas nozīmē, ka saskaņā ar izteiksmi (66) uz šīs līnijas  $\partial A / \partial \tau = 0$ . Tāpēc robeža, kas sakrīt ar antisimetrijas asi, ir līdzvērtīga robežai starp vidēm ar  $\mu_1$  un  $\mu_2$ , ja  $\mu_2 = 0$ , un tāpēc uz antisimetrijas ass vienmēr

$$A = 0, \quad (75)$$

t.i., uzdodami nullvērtības pirmā veida robežnosacījumi.

Uz simetrijas ass  $B_\tau = H_\tau = 0$ , jo magnētiskās spēka līnijas šo asi šķērso taisnā leņķī. Tas nozīmē, ka robeža, kas sakrīt ar simetrijas asi, ir līdzvērtīga robežai starp vidēm ar  $\mu_1$  un  $\mu_2$ , ja  $\mu_1 = \infty$  un tāpēc uz simetrijas ass vienmēr

$$\frac{\partial A}{\partial n} = 0, \quad (76)$$

t.i., uzdodami nullvērtības otrā veida robežnosacījumi.

Tādējādi iepriekš aplūkotās robežas ar vidēm  $\mu_2 = 0$  un  $\mu_1 = \infty$  robežnosacījumu ziņā ir fizikāli analogiskas robežām, ko veido antisimetrijas un simetrijas assis, ja magnētisko lauku rada attiecīgi dažāda virziena un vienāda virziena strāvas, bet  $\mu_1 = \mu_2$ .



### 3.3. Robežnosacījumu speciāli gadījumi un aprēķina apgabala izvēle

Lai aprēķinātu dažādus no elektromagnētiskā lauka atkarīgus elektrisko mašīnu raksturlielumus, nepieciešama informācija par šī lauka kopējo ainu visā mašīnā. Tomēr, ievērojot magnētiskā lauka periodiskumu un simetriju, šo lauka kopainu var iegūt no laukiem atsevišķos apgabalos, kurus izvēlas tā, lai katru šādu atsevišķo apgabalu – aprēķina apgabalu – varētu aplūkot neatkarīgi no cita apgabala. Magnētiskā lauka aprēķina apgabala izvēle ir tieši saistīta ar robežnosacījumiem uz šī apgabala robežām. Principā par aprēķina apgabalu varētu izvēlēties jebkuru noslēgtu apgabalu mašīnas šķērsriezuma plaknē ar noteikumu, ja uz šī apgabala robežām ir zināmi pirmā vai otrā veida robežnosacījumi, turklāt pirmā veida robežnosacījumi var būt gan tiešā, gan netiešā formā.

Neskatoties uz to, ka praksē elektromagnētiskā lauka aprēķina uzdevumi var būt ļoti daudzveidīgi (atkarībā no mašīnas tipa, tās darba režīma, konstrukcijas īpatnībām u. tml.), var minēt vairākus tipiskus variantus aprēķina apgabala izvēlē saistībā ar robežnosacījumiem.

#### Viens magnētiskā lauka avots.

Šāds gadījums atbilst režīmam, kad strāva plūst tikai vienā no mašīnas tinumiem, piemēram, statora vai rotora tinumā, primārajā vai sekundārajā tinumā u. tml. Aprēķina apgabala izvēlē un ar to saistītai robežnosacījumu uzdošanā tad var būt vairāki vairāki raksturīgi gadījumi.

1. Magnētiskajai sistēmai (vai tās atsevišķiem elementiem, piemēram, poliem) ir ģeometriskās simetrijas ass (13. zīm. a) un ģeometrisko un elektrisko periodiskumu raksturo sakarība

$$T_e = mT_g, \quad (77)$$

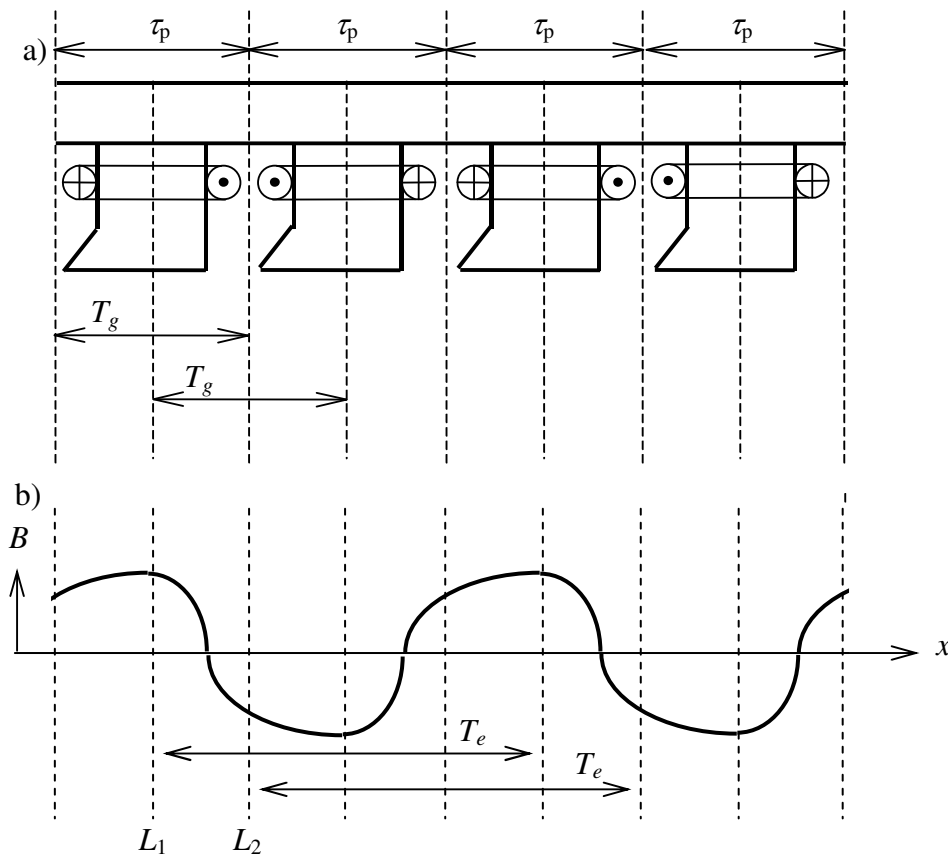
kur  $m \geq 2$ , turklāt jebkura elektriskās simetrijas ass sakrīt ar kādu no ģeometriskās simetrijas asīm. Tad par aprēķina apgabalu var izvēlēties apgabalu, kura viena robeža sakrīt ar simetrijas asi, bet otra – ar tai sekojošo antisimetrijas asi, un kura platums tāpat ir  $T_e/4$  (13. zīmējumā tas atbilst pusei no pola iedaļas  $\tau_p/2$ ). Tā kā šajā gadījumā eksistē magnētiskā lauka simetrijas un antisimetrijas ass, tad robežnosacījumi uz šīm asīm uzdodami saskaņā ar (75) un (76). Var atzīmēt, ka aprēķina apgabals  $T_e/4$  ar minētajiem robežnosacījumiem izmantojams, aprēķinot, piemēram, magnētisko lauku līdzstrāvas vai sinhronās mašīnas tukšgaitas režīmā (enkura strāva  $I_a = 0$ ), līdzstrāvas mašīnas šķērsreakcijas magnētisko lauku (sukas novietotas uz ģeometriskās neitrāles), enkura garenreakcijas magnētisko lauku (sukas nobīdītas attiecībā pret ģeometrisko neitrāli 90 elektrisko grādu leņķī), sinhronās mašīnas enkura šķērsreakcijas vai garenreakcijas magnētisko lauku, kā arī citos gadījumos.

2. Magnētiskajai sistēmai vai tās elementiem nav ģeometriskās simetrijas ass (14. zīm.), bet ir spēkā sakarība (77). Šajā gadījumā par aprēķina apgabalu var izvēlēties jebkuru apgabalu, kura platums ir  $T_e/2$  (14. zīmējumā tas atbilst vienai pola iedaļai  $\tau_p$ ), t.i., par vienu no divām aprēķina apgabala robežām patvaļīgi var izvēlēties kaut kādu līniju  $L_1$ , bet otra robeža tad būs tāda līnija  $L_2$ , kura atrodas attālumā  $T_e/2$  no līnijas  $L_1$ . Vairāku praktisku apsvērumu dēļ līnijas  $L_1$  un  $L_2$  vēlam orientēt tā, lai tās sakristu ar elektriskās simetrijas vai antisimetrijas asīm, vai

citām līnijām (sk. 14. zīm.). Šajā gadījumā uz divām apgabala robežām uzdodami pirmā veida robežnosacījumi netiešā formā:

$$A_1 = -A_2, \quad (78)$$

kur  $A_1$  un  $A_2$  – vektoriālais potenciāls attiecīgi uz robežām  $L_1$  un  $L_2$ .



14. zīm.

Var atzīmēt, ka aprēķina apgabals  $T_e/2$  ar minētajiem robežnosacījumiem izmantojams, aprēķinot, piemēram, magnētisko lauku tukšgaitā tādā līdzstrāvas vai sinhronajā mašīnā, kuras poli ir nesimetriski.

3. Magnētiskajai sistēmai vai tās elementiem ir ģeometriskās simetrijas asis, ir spēkā sakarība (77), bet neviena no elektriskās simetrijas vai antisimetrijas asīm nesakrīt ar kādu no ģeometriskās simetrijas asīm. Šajā gadījumā robežnosacījumu uzdošana atbilst 2. punktā iztirzātajam variantam (aprēķina apgabals ir  $T_e/2$  un robežnosacījumi uzdodami saskaņā ar (78)), un šāds variants var būt, piemēram, pētot līdzstrāvas mašīnas enkura reakcijas lauku, ja sukas nobīdītas attiecībā pret ģeometrisko neitrāli patvaļīgā leņķī.

**Divi magnētiskā lauka avoti.**

4. Lauka abu avotu elektriskie periodi ir vienādi

$$T_{e1} = T_{e2} \quad (79)$$

un to elektriskās simetrijas asis sakrīt. Magnētiskajai sistēmai vai tās elementiem ir ģeometriskās simetrijas asis, turklāt ir spēkā sakarība

$$T_{e1} = T_{e2} = mT_g, \quad (80)$$

un jebkura elektriskās simetrijas ass sakrīt ar kādu no ģeometriskās simetrijas asīm. Šajā gadījumā aprēķina apgabala izvēle un robežnosacījumu uzdošana pilnībā atbilst variantam, kas iztirzāts šīs apakšnodaļas 1. punktā magnētiskam laukam ar vienu avotu. Praksē šāds variants iespējams, aprēķinot, piemēram, sinhronās mašīnas rezultējošo magnētisko lauku īsslēguma režīmā, kad praktiski darbojas tikai enkura gerenreakcija.

5. Tāpat kā šīs apakšnodaļas 4. punktā, magnētiskajai sistēmai ir ģeometriskās simetrijas asis, ir spēkā sakarības (79) un (80), bet lauka abu avotu elektriskās simetrijas asis nesakrīt. Tad aprēķina apgabala izvēle un robežnosacījumi atbilst variantam, kas iztirzāts šīs apakšnodaļas 2. punktā magnētiskam laukam ar vienu avotu.

6. Lauka abu avotu elektriskie periodi ir dažādi, turklāt

$$T_{e1} = nT_{e2}, \quad (81)$$

kur  $n$  – jebkurš vesels skaitlis. Magnētiskā sistēma vai tās elementi var būt gan simetriski, gan nesimetriski, bet ir spēkā sakarība

$$T_{e1} = mT_g, \quad (82)$$

kur  $T_{e1}$  – lielākais no lauka avotu elektriskajiem periodiem;  $m \geq 2$  (sk. iepriekš). Šajā gadījumā par aprēķina apgabalu var ņemt jebkuru apgabalu, kura platums ir vienāds ar  $T_{e1}$  un uz aprēķina apgabala divām robežām uzdodami pirmā veida robežnosacījumi netiešā formā:

$$A_1 = A_2, \quad (83)$$

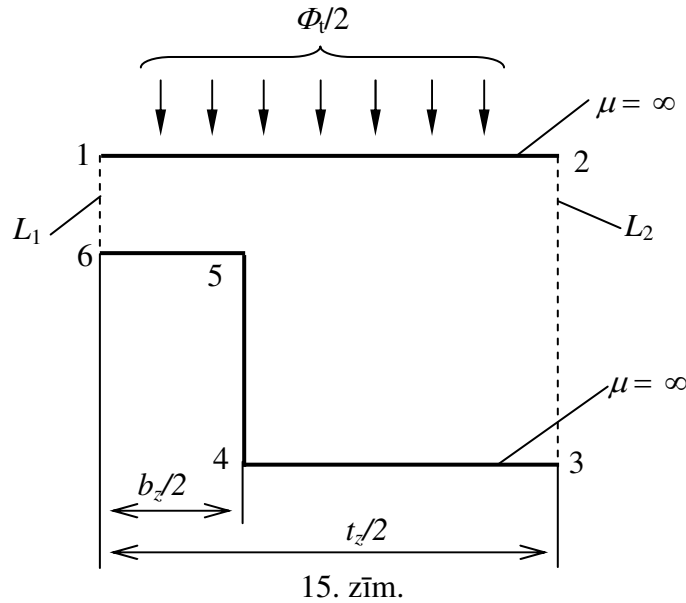
kur  $A_1$  un  $A_2$  – vektoriālais potenciāls attiecīgi uz divām apgabala robežām.

Var atzīmēt, ka 6. punktā aplūkots gadījums būtībā ir pats vispārīgākais gadījums, kas piemērojams arī 1.– 5. punktā aplūkotajiem variantiem.

#### **Magnētiskā lauka avots atrodas ārpus aprēķina apgabala.**

Šāds uzdevums var būt, pētīt, piemēram, statora vai rotora zobu slāņa ģeometrijas ietekmi uz gaisa spraugas magnētiskā lauka raksturlielumiem (gaisa spraugas koeficientu, magnētiskā lauka pulsācijām, induktormašīnu galvenā magnētiskā lauka sadalījumu u.tml.). Šajā gadījumā aprēķina apgabalu iespējams ierobežot vispirms jau no statora un rotora puses, pieņemot feromagnētiskai videi  $\mu = \infty$  (sk. 11. zīm.). Turklāt, ievērojot zobu slāņa ģeometrisko periodiskumu, ko raksturo periods  $T_g$ , kas šajā gadījumā vienāds ar zoba iedaļu  $t_z$ , par aprēķina apgabalu var izvēlēties apgabalu, kas atbilst zoba iedaļai  $t_z$ . Bet sakarā ar to, ka katrai zoba iedaļai ir divas simetrijas asis, magnētiskā lauka aina attiecībā pret šīm asīm ir

simetriska, un par aprēķina apgabalu var ņemt apgabalu ar platumu  $t_z/2$  un robežām  $L_1$  un  $L_2$ , kur  $L_1$  un  $L_2$  sakrīt attiecīgi ar zoba un rievas simetrijas asīm (15. zīm.).



Robežnosacījumus uz minētajām robežām var uzdot, ja zināma zoba iedaļas magnētiskā plūsma  $\Phi_t$  (šo magnētisko plūsmu nosaka lauka avots, kas atrodas ārpus aprēķina apgabala, piemēram, galveno polu tinums). Saskaņā ar izteiksmi (63) un 15. zīmējumu

$$\frac{\Phi_t}{2} = (A_2 - A_1)l, \quad (84)$$

kur  $A_1$  un  $A_2$  – vektoriālais potenciāls attiecīgi uz robežām  $L_1$  un  $L_2$ ;  $l$  – mašīnas garums aksiālajā virzienā.

Tā kā zoba iedaļas plūsmu  $\Phi_t$  nosaka tikai vektoriālo potenciālu  $A_2$  un  $A_1$  starpība, tad vienam no šiem lielumiem var piešķirt jebkuru vērtību, tajā skaitā nulli. Šajā gadījumā no izteiksmes (84) var atrast, ka uz robežām  $L_1$  un  $L_2$  ir uzdodami šādi pirmā veida robežnosacījumi:

$$A_1 = 0; \quad (85)$$

$$A_2 = \frac{\Phi_t}{2l}. \quad (86)$$

### Nestacionārs magnētiskais lauks.

Iepriekš (sk. 2.3) tika atzīmēts, ka nestacionāra elektromagnētiskā lauka vienādojumu (vienādojumu, kas satur locekļus  $\partial A/\partial t$  un  $\partial A/\partial x$ ) risināšanu var aizstāt ar vairāku stacionāra lauka vienādojumu (vienādojumu (56) vai (57)) risināšanu. No robežnosacījumu viedokļa šeit aplūkojami vairāki raksturīgi gadījumi.

7. Magnētisko lauku rada vienfāzes maiņstrāva ar strāvas blīvumu  $j_a = f(t)$  (piemēram, vienfāzes transformatoros, vienfāzes maiņstrāvas mašīnās), bet magnētiskās sistēmas elementi ir telpā nekustīgi ( $v=0$ ). Lai iegūtu vektoriālā potenciāla sadalījumu kā laika funkciju  $A(t)$ , šajā gadījumā var risināt  $n$  stacionāra lauka uzdevumus ar uzdotām lauka avota  $n$  strāvas blīvuma momentānajām vērtībām, t.i.,  $j_a(t_1), j_a(t_2), \dots, j_a(t_i), \dots, j_a(t_n)$ . Šādu uzdevumu risināšanas rezultātā tad

iegūst vektorialā potenciāla vērtības  $A(t_1), A(t_2), \dots, A(t_i), \dots, A(t_n)$ , kas atbilst nepārtrauktas funkcijas  $A(t)$  diskrētām vērtībām fiksētos laika momentos  $t_i$ . Šim nolūkam maiņstrāvas periodu  $T$  lietderīgi sadalīt  $n$  vienādās daļās ar soli  $h_i = \Delta t = T/n$ , turklāt tā, lai  $n \geq 12$ .

Kā zināms, vienfāzes maiņstrāvas gadījumā pastāv telpā nekustīgs magnētiskais lauks, kura telpiskais sadalījums un lauka aina saglabājas jebkurā laika momentā  $t_i$ , t.i., jebkurai lauka avota strāvas blīvuma vērtībai. Tāpēc, uzdodot robežnosacījumus, var vadīties no īpatnībām, kas iztirzātas šīs apakšnodaļas 1. – 6. punktā (simetriju, periodiskumu, aprēķina apgabala izvēli).

8. Magnētisko lauku rada trīsfāžu maiņstrāva nekustīgā trīsfāžu tinumā vai līdzstrāva rotējošā tinumā. Abos minētajos gadījumos ir darīšana ar rotējošu magnētisko lauku, kura telpiskais sadalījums un lauka aina katrā laika momentā ir dažādi. Pirmajā gadījumā, kad lauku rada trīsfāžu maiņstrāva, līdzīgi kā 7. punktā, jāizvēlas  $n$  laika momenti  $t_i$ , katrā no tiem uzdodot dažādas atsevišķo fāžu strāvu blīvuma momentānās vērtības  $j_{aA}(t_i), j_{aB}(t_i), j_{aC}(t_i)$ . 16. zīmējumā a vienkāršoti attēlota divpolu magnētiskā lauka aina trīsfāžu asinhronā mašīnā trīs raksturīgos laika momentos  $t_1 = 0, t_2 = T/12$  un  $t_3 = 2T/12$ , kad attiecīgo fāžu strāvu momentānās vērtības atbilst 1. tabulā norādītajām vērtībām. Šo strāvu momentānās vērtības var iegūt no izteiksmēm

$$\begin{aligned} i_A &= I_m \cos \omega t, \\ i_B &= I_m \cos(\omega t - 2\pi/3), \\ i_C &= I_m \cos(\omega t - 4\pi/3) \end{aligned}$$

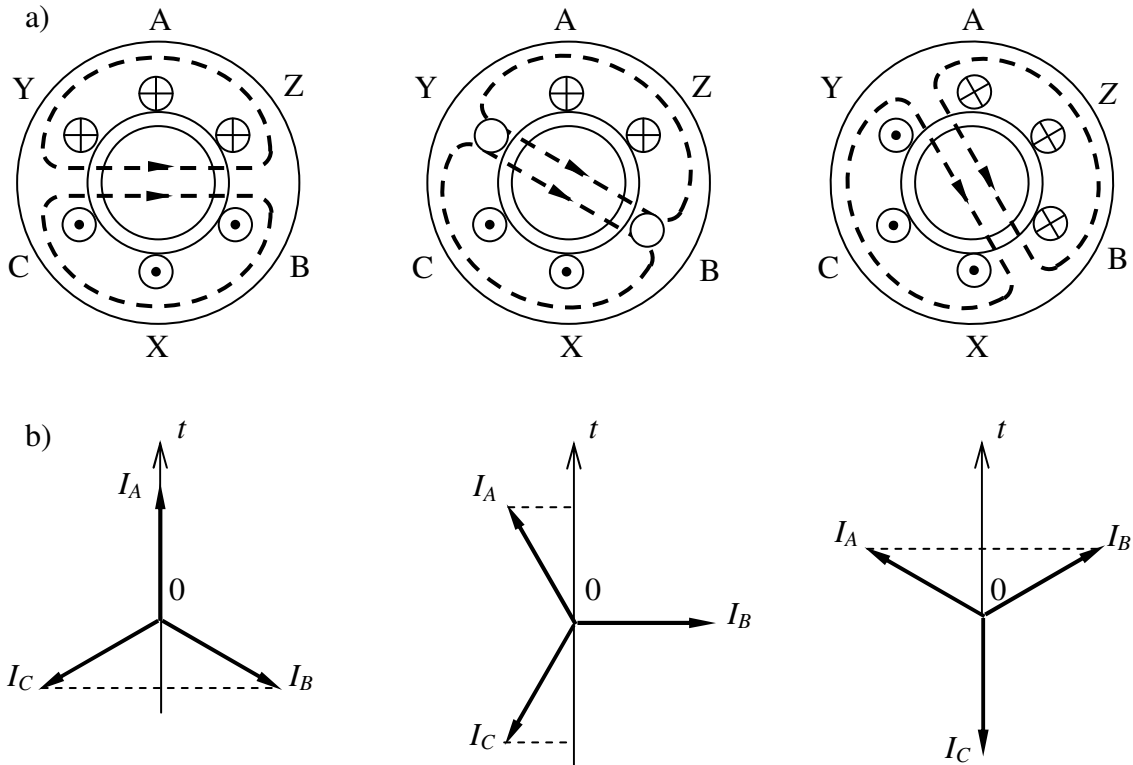
vai arī no 16. zīmējuma b vektoru diagrammas kā atsevišķu fāžu strāvu vektoru projekcijas uz laika asi.

1. tabula

$t_i$	$i_A$	$i_B$	$i_C$
0	$I_m$	$-I_m/2$	$-I_m/2$
$T/12$	$\sqrt{3}/2 I_m$	0	$-\sqrt{3}/2 I_m$
$2T/12$	$I_m/2$	$I_m/2$	$-I_m$

Kā redzams no 16. zīmējuma a, jebkurā no aplūkotajiem laika momentiem eksistē magnētiskā lauka antisimetrijas ( $m'$ ) un simetrijas ( $m''$ ) asis. Uz šīm asīm robežnosacījumi uzdodami saskaņā ar (75) un (76), t.i., uz antisimetrijas ass nullvērtības pirmā veida, bet uz simetrijas ass nullvērtības otrā veida robežnosacījumi, un par aprēķina apgabalu var izvēlēties apgabalu  $T_e/4$ , kur  $T_e$  - elektriskais periods (sk. 3.2). Īpatnība šeit ir tikai tā, ka simetrijas un antisimetrijas asu orientācija mainās atbilstoši aplūkojamam laika momentam  $t_i$ . Tā, piemēram, 16. zīmējumā attēlotajā gadījumā, ja  $n = 12$ , tad  $h_i = T/12$ , jeb, izsakot šo soli ar elektrisko leņķi,  $h_i = 2\pi/12 = \pi/6 = 30^\circ$ . Tas nozīmē, ka vektorialais potenciāls kā laika funkcija ir noteikts ar 12 diskrētām vērtībām. Taču šīs 12 vērtības faktiski ir iegūstamas no 3 atsevišķiem uzdevumiem, cikliski samainot vietām attiecīgās fāzes. Var atzīmēt, ka, izvēloties patvaļīgu laika soli, turklāt tādu, ka  $n \neq 3, n \neq 6, n \neq 12$ , strāvu sadalījums

mašīnas tinuma fāzēs nav simetrisks un tāpēc neeksistē simetrijas un antisimetrijas asis. Šajos gadījumos dažādiem laika momentiem  $t_i$  atbilstošas vektoriālā potenciāla vērtības atrodamas, risinot vienādojumu apgabalam  $T_e/2$  vai  $T_e$  ar netiešā formā uzdotiem pirmā veida robežnosacījumiem (78) vai (83).



16. zīm

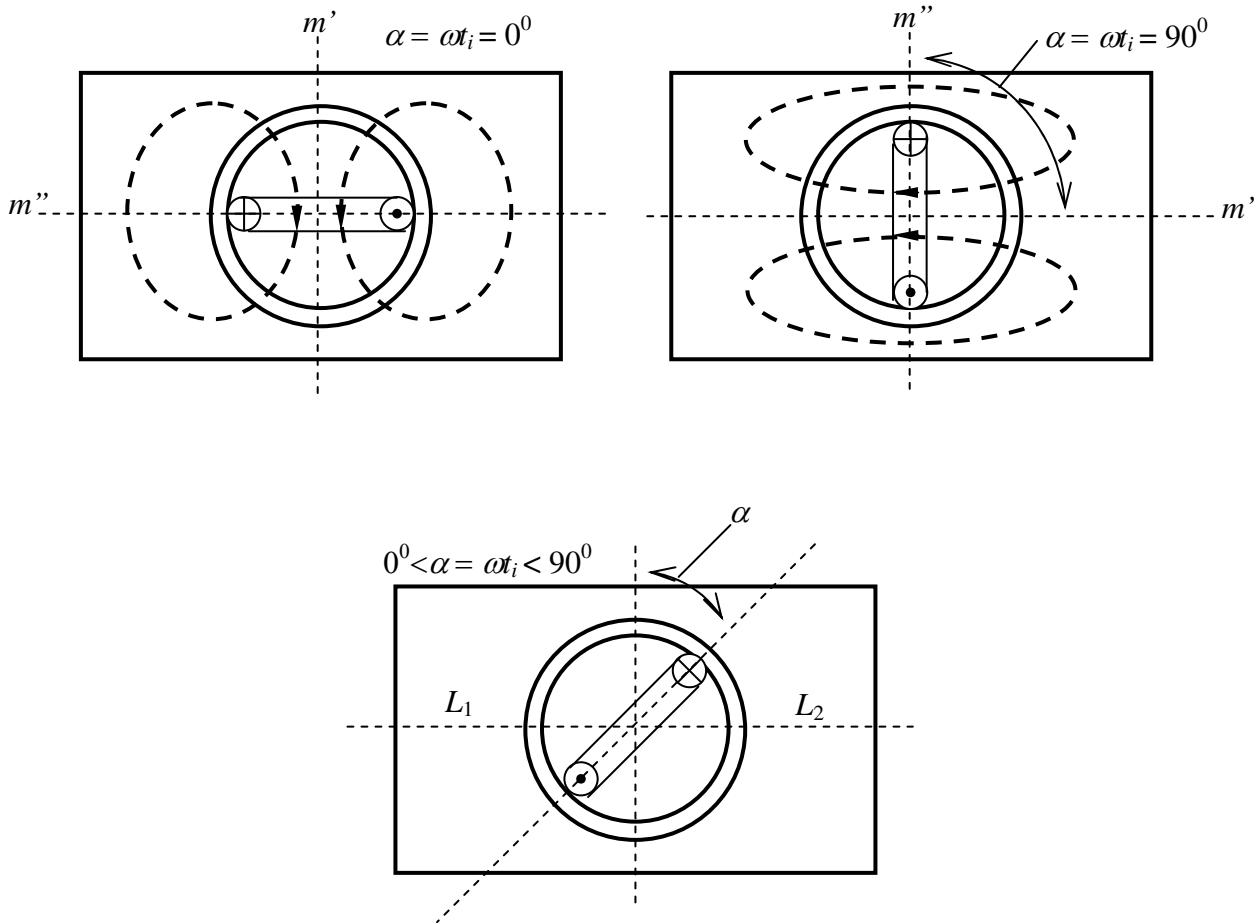
Otrajā gadījumā, kad magnētisko lauku rada ar līdzstrāvu barots rotējošs tinums, jārisina  $n$  stacionāra lauka uzdevumi, katrs no kuriem atbilst noteiktam laika momentam  $t_i$ , kurā rotējošais tinums ieņem noteiktu stāvokli attiecībā pret kādu no nekustīgajām ģeometriskās simetrijas asīm. Arī šajā gadījumā iespējami tādi rotora stāvokļi, ka eksistē magnētiskā lauka antisimetrijas ( $m'$ ) un simetrijas ( $m''$ ) asis (17. zīm. a un b), un kad par aprēķina apgabalu var izvēlēties  $T_e/4$ , uzdodot uz šīm asīm robežnosacījumus saskaņā ar (75) un (76).

Laika momentos  $t_i$ , kas atbilst patvaļīgiem rotora stāvokļiem (17. zīm. c), kad  $0 < \alpha < 90^\circ$ , par aprēķina apgabalu jāizvēlas apgabals  $T_e/2$  vai  $T_e$  ar netiešā formā uzdotiem pirmā veida robežnosacījumiem uz robežām  $L_1$  un  $L_2$  saskaņā ar (78) vai (83).

Nobeigumā atzīmēsim dažas vispārīgas rekomendācijas aprēķina apgabala izvēlei saistībā ar robežnosacījumiem.

Jebkurā gadījumā aprēķina apgabalu var izvēlēties kā apgabalu, kas ietver visu mašīnas šķērsriezumu un robežnosacījumus uzdot saskaņā ar 3.2. apakšnodaļas 1. punktā formulētajiem principiem. Šāda pieeja neprasa lauka ainas iepriekšēju fizikālu analīzi (simetrija, periodiskums un šo faktoru speciāli gadījumi). Tomēr tad ir jāaprēķinās ar aprēķinam sagatavojamās informācijas apjoma būtisku palielināšanos un

kļūdu varbūtību, ievadot informāciju datorā. Tādēļ lietderīgi vispirms ir izdarīt pētāmā magnētiskā lauka ainas fizikālu analīzi un noskaidrot, kuru no šajā apakšnodaļā minētajiem speciālajiem gadījumiem (sk. 1. – 8. punktu) var izmantot uzdevuma risināšanas procesa vienkāršošanai.

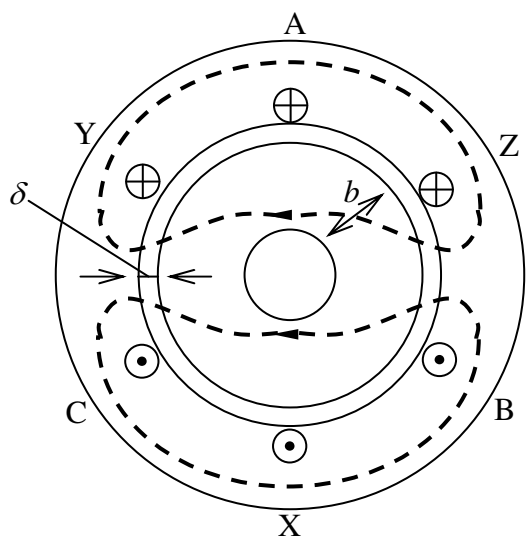


17. zīm.

#### 4. Magnētiskā lauka aprēķina analītiskās metodes

Kā tika atzīmēts 1. nodaļā, analītisko metožu lietošana ir visai ierobežota, jo elektromagnētiskā lauka diferenciālvienādojumu analītisku atrisinājumu var iegūt tikai gadījumos, kad reālais pētāmais objekts tiek stipri vienkāršots (sk., piemēram, [6]). Ievērojot minētos apsvērumus, šajā nodaļā aplūkosim tikai vienu, samērā vienkāršu magnētiskā lauka analītiskā aprēķina uzdevumu. Iztirzājot šī uzdevuma risināšanas gaitu, vienlaikus iepazīsimies ar dažām analītisko metožu izmantošanas īpatnībām, kuras lietojamas arī citos elektromagnētiskā lauka aprēķina uzdevumos.

Pieņemsim, ka jāatrod statora tinuma trīsfāžu strāvas radītā magnētiskā lauka sadalījums asinhronās mašīnas rotorā laika momentā, kad tinuma fāzē A strāvai ir maksimālā vērtība ( $i_A = I_m$ ,  $i_B = i_C = -I_m/2$ ) atbilstoši 18. zīmējumam.



18. zīm.

Uzdevuma risināšanai izdarīsim šādus vienkāršojumus un pieņēmumus:

- rotora virsma ir bez rievām;
- cilindriskā mašīna aizstāta ar lineāru (19. zīm.);
- statora tinuma radītās magnētiskās indukcijas normālās komponentes sadalījums uz rotora virsmas ( $y=0$ ) ir sinusoidāls, t.i., tiek ievērota tikai magnētiskās indukcijas pirmā harmonika

$$B_{1y0} = B_m \cos \frac{\pi}{\tau_p} x, \quad (87)$$

kur  $\tau_p$  – pola iedaļa.

Tā kā saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem tiek aplūkots mašīnas tukšgaitas režīms, tad aprēķina apgabalā, kas šajā gadījumā ietver tikai rotoru, lauka avotu nav ( $j_a = 0$ ) un tāpēc jārisina vienādojums (57). Šī vienādojuma risinājumu meklēsim sinusoidālas  $x$  funkcijas veidā

$$A = A_m \sin \frac{\pi}{\tau_p} x, \quad (88)$$

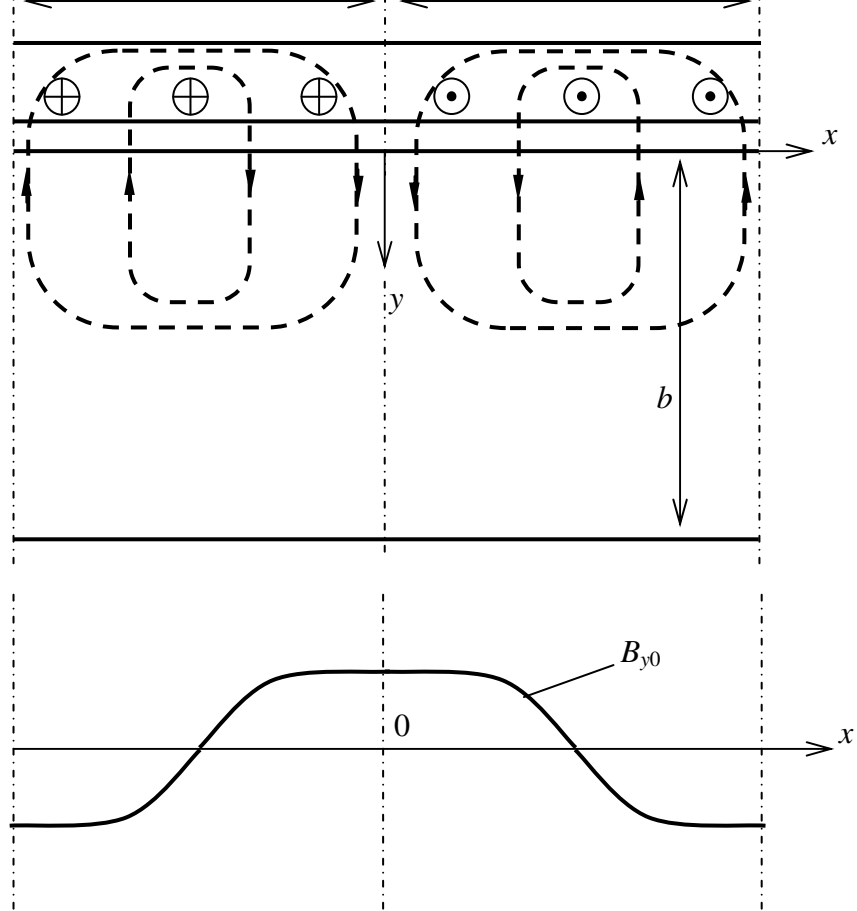
kas izriet no (47) un kurā  $A_m$  – no koordinātas  $x$  neatkarīga vektoriālā potenciāla maksimālā vērtība, t.i., vērtība uz magnētiskā lauka simetrijas asīm  $x = \pm \tau_p / 2$  (19. zīm.).

Atvasinot izteiksmi (88) divreiz pēc  $x$  un  $y$ , iegūstam

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = - \left( \frac{\pi}{\tau_p} \right)^2 A_m \sin \frac{\pi}{\tau_p} x;$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 A_m}{\partial y^2} \sin \frac{\pi}{\tau_p} x.$$





19. zīm.

Ievietojot šīs izteiksmes vienādojumā (57) un saīsinot ar  $\sin \frac{\pi}{\tau_p} x$ , iegūstam šādu vienādojumu:

$$\frac{\partial^2 A_m}{\partial y^2} - \alpha^2 A_m = 0, \quad (89)$$

kur izmantots apzīmējums

$$\alpha = \frac{\pi}{\tau_p}. \quad (90)$$

Vienādojums (89) ir lineārs otrās kārtas diferenciālvienādojums, kura vispārējais atrisinājums [2] ir

$$A_m = C_1 e^{\alpha y} + C_2 e^{-\alpha y}, \quad (91)$$

kur  $C_1$  un  $C_2$  – patvaļīgas integrēšanas konstantes.

Vienādojuma (89) partikulāro atrisinājumu atrod, ievietojot  $C_1$  un  $C_2$  vietā to vērtības, kas noteiktas no robežnosacījumiem, t.i., no meklējamās funkcijas  $A_m$  vērtībām uz robežām  $y = 0$  un  $y = b$ :  $A_m(y = 0) = A_{m0}$  un  $A_m(y = b) = A_{mb}$ . Saskaņā ar izteiksmēm (47) un (87)

$$A_0 = A(y=0) = -\int B_{1y_0} dx = -\frac{\tau_p}{\pi} B_m \sin \frac{\pi}{\tau_p} x = A_{m0} \sin \frac{\pi}{\tau_p} x, \quad (92)$$

kur

$$A_{m0} = -\frac{\tau_p}{\pi} B_m. \quad (93)$$

No magnētiskā lauka fizikālās ainas izriet, ka uz rotora jūga robežas ( $y = b$ )  $B_y = 0$ , jo magnētiskās spēka līnijas šo robežu nešķērso. Tāpēc saskaņā ar (47) un (88)

$$B_{1yb} = -\frac{\pi}{\tau_p} A_{mb} \cos \frac{\pi}{\tau_p} x = 0,$$

kas iespējams tikai tad, ja

$$A_{mb} = 0. \quad (94)$$

Ievietojot izteiksmē (91) koordinātām  $y = 0$  un  $y = b$  atbilstošās vektorālā potenciāla amplitūdas vērtības no (93) un (94), iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{aligned} A_{m0} &= C_1 + C_2, \\ 0 &= C_1 e^{ab} + C_2 e^{-ab}. \end{aligned}$$

Atrisinot šo sistēmu, iegūstam (pārveidojumos ievērojot to, ka hiperboliskais sinuss  $\text{sh} \alpha b = (e^{\alpha b} - e^{-\alpha b})/2$ )

$$C_1 = -\frac{A_{m0}}{2 \text{sh} ab} e^{-ab}, \quad (95)$$

$$C_2 = \frac{A_{m0}}{2 \text{sh} ab} e^{ab}. \quad (96)$$

Ja integrēšanas konstantes  $C_1$  un  $C_2$  no (95) un (96) ievieto izteiksmē (91), pēc pārveidojumiem iegūstam

$$A_m = A_{m0} \frac{\text{sh} \alpha (b-y)}{\text{sh} \alpha b}, \quad (97)$$

jeb, ievērojot (93), (88) un (89),

$$A = -\frac{\tau_p}{\pi} B_m \frac{\text{sh} \frac{\pi}{\tau_p} (b-y)}{\text{sh} \frac{\pi}{\tau_p} b} \sin \frac{\pi}{\tau_p} x. \quad (98)$$

Šī izteiksme tad arī ir uzdevuma atrisinājums analītiskas funkcijas  $A = f(x, y)$  veidā, kuru izmantojot var atrast jebkurā rotora punktā magnētisko indukciju ( $B_x, B_y, B$ ), magnētiskā lauka intensitāti ( $H_x, H_y, H$ ) ar formulām (46) – (49), (58), (59) vai jebkurā rotora šķērsgrīzumā magnētisko plūsmu  $\Phi$  ar formulu (63).

Var atzīmēt, ka izteiksme (98) izmantojama arī augstāko harmoniku magnētisko lauku aprēķināšanai, ja šajā izteiksmē  $\tau_p$  aizstāj ar  $\tau_{pv} = \frac{\tau_p}{v}$  un  $B_m$  ar augstāko

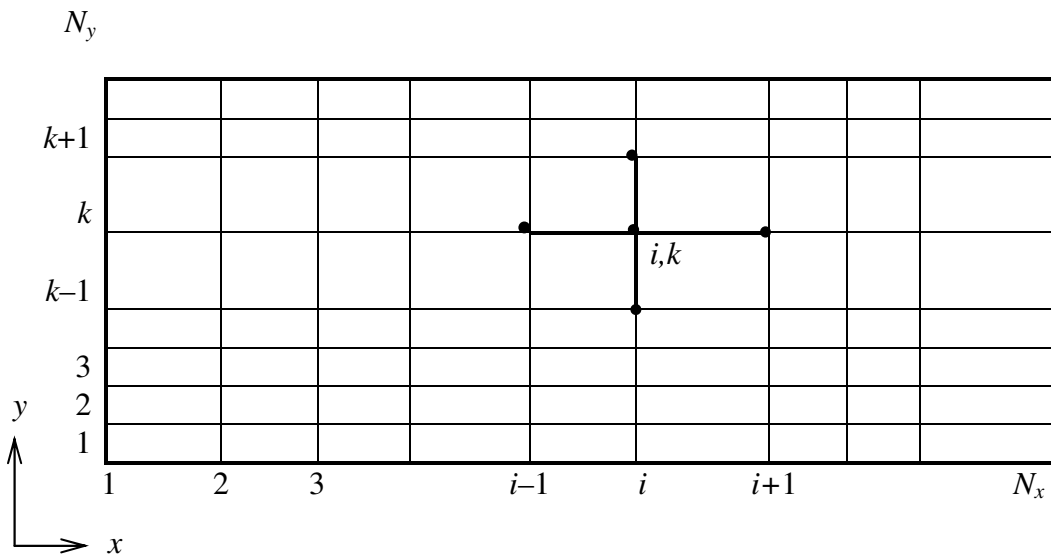
harmoniku magnētiskās indukcijas indukcijas amplitūdas vērtību, kuru var noteikt, piemēram, izmantojot [5].

## 5. Magnētiskā lauka aprēķina skaitliskās metodes

### 5.1. Galīgo diferencu metode

Magnētiskā lauka aprēķinam var izmantot galīgo diferencu un galīgo elementu metodi.

Galīgo diferencu metodes, ko bieži sauc arī par režģa metodi, būtība ir tā, ka atvasinājumi diferenciālvienādojumos tiek aizstāti ar to tuvinātām vērtībām, kas izteiktas ar galīgajām diferencēm. Šādas aizstāšanas rezultātā diferenciālvienādojuma vietā iegūst algebrisku vienādojumu sistēmu, kuras risināšanai var izmantot uiniversālās metodes un ar datortehniku viegli realizējamās standartprogrammas.



20. zīm.

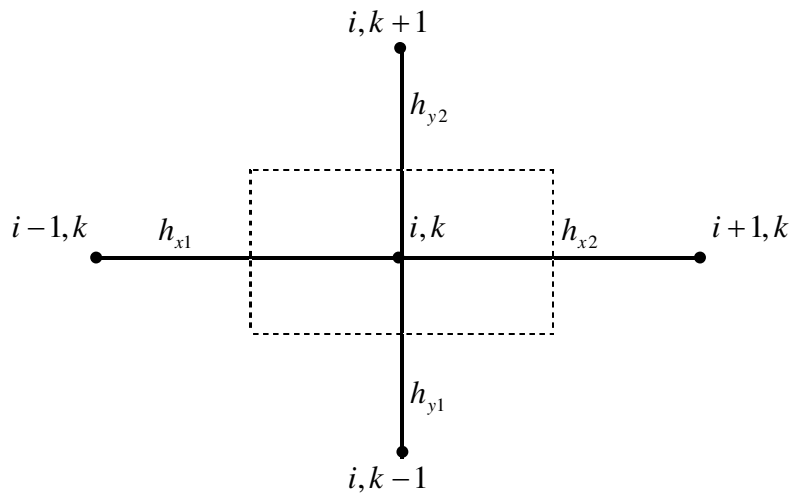
Aplūkosim algebriskos vienādojumus, kuri izmantojami diferenciālvienādojuma (56)

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -\mu j_a$$

skaitliskai risināšanai ar galīgo diferencu metodi. Pieņemsim, ka dots taisnstūra formas magnētiskā lauka aprēķina apgabals, kas attēlots 20. zīmējumā.

Uzklāsim šim apgabalam taisnstūrainu tīklu jeb režģi, ko veido savstarpēji perpendikulāras koordinātu asīm paralēlas līnijas. Līniju krustpunktus sauc par režģa mezgliem. Patvaļīga mezgla koordinātas apzīmēsim ar  $x_{i,k}$ ,  $y_{i,k}$ , kur  $i = 1, 2, 3, \dots, N_x$  – mezglu skaits  $x$  ass virzienā, bet  $k = 1, 2, 3, \dots, N_y$  – mezglu skaits  $y$  ass virzienā.

Var uzskatīt, ka režģis sastāv no vienāda tipa elementiem (21. zīm.), kas satur četrus zarus un piecus mezglus.



21. zīm.

Attālumus starp diviem blakus mezgliem  $x$  vai  $y$  ass virzienā sauc par režģa soļiem:

$$h_{x1} = x_{i,k} - x_{i-1,k},$$

$$h_{x2} = x_{i+1,k} - x_{i,k},$$

$$h_{y1} = y_{i,k} - y_{i,k-1},$$

$$h_{y2} = y_{i,k+1} - y_{i,k},$$

turklāt vispārīgā gadījumā režģis var būt ar nevienmērīgu soli, t.i.,  $h_{x1} \neq h_{x2} \neq h_{y1} \neq h_{y2}$ .

Apzīmēsim vektoriālā potenciāla vērtības ar indeksiem, kas atbilst mezglu numerācijai un uzrakstīsim vienādojumu (98) galīgo diferencu formā patvaļīgam mezglam  $i, k$ . Saskaņā ar [1] intervālos  $h_{x1}$  un  $h_{x2}$  funkcijas pirmo atvasinājumu pēc  $x$  tuvināti var izteikt ar pirmās kārtas galīgajām diferencēm:

$$\left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)_1 = \frac{A_{i,k} - A_{i-1,k}}{h_{x1}}; \quad (99)$$

$$\left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)_2 = \frac{A_{i+1,k} - A_{i,k}}{h_{x2}}. \quad (100)$$

Savukārt, funkcijas otro atvasinājumu pēc  $x$  mezglā  $i, k$  tuvināti var izteikt kā

$$\left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right)_{i,k} = \frac{\left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)_2 - \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)_1}{\frac{h_{x1} + h_{x2}}{2}},$$

jeb, ievērojot (99) un (100),

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_{i,k} = \frac{\frac{A_{i+1,k} - A_{i,k}}{h_{x2}} - \frac{A_{i,k} - A_{i-1,k}}{h_{x1}}}{\frac{h_{x1} + h_{x2}}{2}} = \frac{2}{h_{x1}} \frac{A_{i-1,k} - A_{i,k}}{h_{x1} + h_{x2}} + \frac{2}{h_{x1}} \frac{A_{i+1,k} - A_{i,k}}{h_{x1} + h_{x2}}. \quad (101)$$

Līdzīgā veidā intervālos  $h_{y1}$  un  $h_{y2}$  var izteikt funkcijas pirmos atvasinājumus pēc  $y$ :

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_1 = \frac{A_{i,k} - A_{i,k-1}}{h_{y1}}; \quad (102)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_2 = \frac{A_{i,k+1} - A_{i,k}}{h_{y2}}. \quad (103)$$

Tad funkcijas otrais atvasinājums pēc  $y$  mezglā  $i, k$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_{i,k} = \frac{\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_2 - \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_1}{\frac{h_{y1} + h_{y2}}{2}},$$

jeb, ievērojot (102) un (103),

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_{i,k} = \frac{\frac{A_{i,k+1} - A_{i,k}}{h_{y2}} - \frac{A_{i,k} - A_{i,k-1}}{h_{y1}}}{\frac{h_{y1} + h_{y2}}{2}} = \frac{2}{h_{y1}} \frac{A_{i,k-1} - A_{i,k}}{h_{y1} + h_{y2}} + \frac{2}{h_{y2}} \frac{A_{i,k+1} - A_{i,k}}{h_{y1} + h_{y2}}. \quad (104)$$

Ievietojot izteiksmes (101) un (104) vienādojumā (56), pēc tam vienādojuma abas puses pareizinot ar  $(h_{x1} + h_{x2})(h_{y1} + h_{y2})/4$  un izdalot ar  $\mu$ , iegūstam šādu vienādojumu:

$$\begin{aligned} & \frac{h_{y1} + h_{y2}}{2\mu h_{x1}} (A_{i-1,k} - A_{i,k}) + \frac{h_{y1} + h_{y2}}{2\mu h_{x2}} (A_{i+1,k} - A_{i,k}) + \\ & + \frac{h_{x1} + h_{x2}}{2\mu h_{y1}} (A_{i,k-1} - A_{i,k}) + \frac{h_{x1} + h_{x2}}{2\mu h_{y2}} (A_{i,k+1} - A_{i,k}) = -\frac{(h_{x1} + h_{x2})(h_{y1} + h_{y2})}{4} j_{ai,k}, \end{aligned} \quad (105)$$

kur  $j_{ai,k}$  – strāvas blīvums mezglā  $i, k$ .

Var atzīmēt vienādojuma (105) atsevišķo locekļu fizikālo jēgu. Tā, piemēram, vienādojuma labā pusē ir strāva, kas plūst caur šķērsriezuma laukumu  $\left(\frac{h_{x1}}{2} + \frac{h_{x2}}{2}\right)\left(\frac{h_{y1}}{2} + \frac{h_{y2}}{2}\right)$  (21. zīmējumā svītrlīniju ietvertais laukums) un kuras blīvums  $j_{ai,k}$  šī laukuma robežās ir nemainīgs. Savukārt, reizinātāji pirms iekavām vienādojuma kreisajā pusē raksturo magnētiskās pretestības. Piemēram, reizinātājs pie pirmā locekļa ir kaut kāda elementa magnētiskās pretestības  $R_{\mu v1}$  reizinājums ar mašīnas garumu  $l$ :

$$\frac{h_{y1} + h_{y2}}{2\mu h_{x1}} = \frac{1}{\mu} \frac{\frac{h_{y1}}{2} + \frac{h_{y2}}{2}}{h_{x1}l} l = R_{\mu 1} l.$$

No šīs formulas redzams, ka  $R_{\mu 1}$  ir magnētiskā pretestība tādām elementam, kura garums ir  $\left(\frac{h_{y1}}{2} + \frac{h_{y2}}{2}\right)$ , bet šķērsriezuma laukums  $h_{x1}l$ .

Vienādojums (105) ir vispārīgā formā uzrakstīts vienādojums lauka aprēķinam ar galīgo diferencu metodi. Šāda tipa vienādojumus var uzrakstīt visiem aprēķina apgabala mezgliem, tādējādi iegūstot  $N$  vienādojumu sistēmu ar  $N$  nezināmiem lielumiem – vektoriālā potenciāla vērtībām visos izvēlētajos mezglos. Atrisinot šo vienādojumu sistēmu, atrod vektoriālā potenciāla vērtības fiksētos mezglos kā vērtību  $A_{i,k} = A(x_{i,k}, y_{i,k})$  kopu, kas nozīmē nepārtrauktas funkcijas  $A(x, y)$  uzdošanu tabulas veidā. Vienādojumu sistēmas risināšanu veic ar pazīstamām (sk., piemēram, [1]) metodēm, izmantojot datortehniku.

Īstenībā sistēmas risināmo vienādojumu skaits ir mazāks nekā  $N$ , ja uz kādas no robežām ir uzdoti pirmā veida robežnosacījumi. Tas nozīmē, ka mezglos, kas atrodas uz šādām robežām, vektoriālā potenciāla vērtības ir zināmas un (105) tipa vienādojumos parādās kā konstantes. Tāpēc, ja kopējais mezglu skaits ir  $N$ , tad sistēma satur  $N' = N - N_1$  vienādojumus ar  $N'$  nezināmajiem lielumiem, kur  $N_1$  – mezglu skaits uz robežām ar pirmā veida robežnosacījumiem. Risināmos  $N'$  vienādojumus, savukārt, var iedalīt divās grupās: 1) vienādojumi apgabala iekšējiem mezgliem un 2) vienādojumi mezgliem, kas atrodas uz apgabala robežām ar otrā veida robežnosacījumiem. Pirmās grupas vienādojumi katram mezglam  $i, k$  uzrakstāmi tādā formā kā vienādojums (105), ievietojot tajā attiecīgo lielumu  $i, k, h, \mu, j_a$  skaitliskās vērtības. Otrās grupas vienādojumu uzrakstīšanai izmanto izteiksmes (99), (100) vai (102), (103). Piemēram, pieņemot, ka mezgli  $i+1, k$  un  $i, k+1$  atrodas uz robežām ar otrā veida robežnosacījumiem (22. zīm), vienādojumi šiem mezgliem attiecīgi būs:  
mezglam  $i+1, k$  (sk. izteiksmi (100))

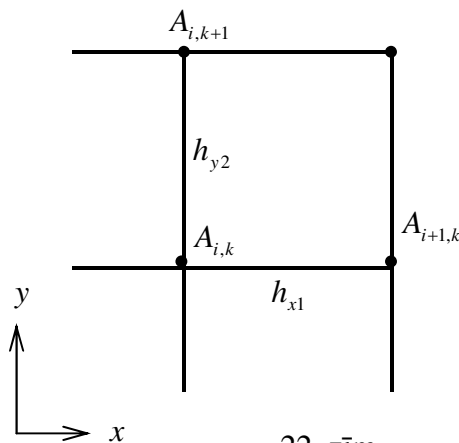
$$\frac{A_{i+1,k} - A_{i,k}}{h_{x2}} = \varphi_{i+1,k}; \quad (106)$$

mezglam  $i, k+1$  (sk. izteiksmi(103))

$$\frac{A_{i,k+1} - A_{i,k}}{h_{y2}} = \varphi_{i,k+1}, \quad (107)$$

kur  $\varphi_{i+1,k}$  un  $\varphi_{i,k+1}$  – otrā veida robežnosacījumu skaitliskās vērtības attiecīgi mezglos  $i+1, k$  un  $i, k+1$ , kas būtībā ir galīgo diferencu formā izteikti funkcijas  $A$  atvasinājumi normāles virzienā šajos mezglos.

Magnētiskā lauka aprēķina uzdevumos parasti  $\varphi_{i+1,k} = 0$  un  $\varphi_{i,k+1} = 0$  (sk. iepriekš 3.2. un 3.3. apakšnodaļas).



22. zīm.

Kā tika atzīmēts, vienādojums (105) atbilst vispārīgam gadījumam, t.i., režģim ar mainīgu soli, kad  $h_{x1} \neq h_{x2} \neq h_{y1} \neq h_{y2}$ . Atsevišķos gadījumos (piemēram, aprēķinot magnētisko lauku ģeometriski vienkāršas konfigurācijas lokālos apgabalos) šo vienādojumu var vienkāršot, izvēloties vienmērīgus, bet dažādus soļus  $x$  un  $y$  ass virzienā:

$$h_{x1} = h_{x2} = h_x; \quad (108)$$

$$h_{y1} = h_{y2} = h_y. \quad (109)$$

Tad vienādojuma (105) vietā iegūstam

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu} \frac{h_y}{h_x} (A_{i-1,k} - A_{i,k}) + \frac{1}{\mu} \frac{h_y}{h_x} (A_{i+1,k} - A_{i,k}) + \frac{1}{\mu} \frac{h_x}{h_y} (A_{i,k-1} - A_{i,k}) + \frac{1}{\mu} \frac{h_x}{h_y} (A_{i,k+1} - A_{i,k}) = \\ & = h_x h_y j_{ai,k}, \end{aligned}$$

jeb, nedaudz pārveidojot,

$$\frac{1}{\mu} \frac{h_y}{h_x} (A_{i-1,k} + A_{i+1,k} - 2A_{i,k}) + \frac{1}{\mu} \frac{h_x}{h_y} (A_{i,k-1} + A_{i,k+1} - 2A_{i,k}) = h_x h_y j_{ai,k}. \quad (110)$$

Vienādojumu (110) var vēl vairāk vienkāršot, ja izvēlas regulāru režģi, t.i., režģi ar vienmērīgu un vienādu soli  $x$  un  $y$  ass virzienā:

$$h_x = h_y = h. \quad (111)$$

Tad, ievietojot šīs soļu vērtības vienādojumā (110), pēc attiecīgiem pārveidojumiem iegūstam

$$\frac{1}{\mu} (A_{i-1,k} + A_{i+1,k} + A_{i,k-1} + A_{i,k+1} - 4A_{i,k}) = h^2 j_{ai,k}. \quad (112)$$

Galīgo diferencu metodes precizitāte būtiski ir atkarīga no soļu izvēles, jo kļūda, risinot šāda tipa uzdevumus, ir proporcionāla  $h^2$ . Tāpēc būtu vēlams izvēlēties

iespējami mazāku soli. Tomēr tad attiecīgi palielinās sistēmas vienādojumu skaits, to risināšanas laiks, kā arī laiks, kas nepieciešams datorā ievadāmās informācijas sagatavošanai un ievadīšanai. Diemžēl kļūdas novērtēšana atkarībā no soļa un soļa korigēšana, pamatojoties uz šo novērtēšanu, iespējama tikai tad, ja zināms uzdevuma precīzais atrisinājums. No šīs problēmas daļēji var izvairīties, veicot skaitliskos eksperimentus ar divkārtņīgā pārrēķina metodi, kuras būtība, risinot, piemēram, vienādojumu (112) ir šāda. Pieņemot kaut kādu soli  $h$ , atrod vienādojumu sistēmas atrisinājuma tuvinātās vērtības  $\tilde{A}_{i,k}$ , bet pēc tam, pieņemot samazinātu soli  $h_1 = h/2$ , – precizētās vērtības  $A_{i,k}^*$ . Katra mezgla vektoriālā potenciāla vērtībai aprēķina lielumu

$$\varepsilon_{i,k} = A_{i,k}^* - \tilde{A}_{i,k}. \quad (113)$$

Risinājuma precizitāti uzskata par pietiekamu, ja izpildās šādi nosacījumi:

$$|\varepsilon_{i,k \max}| \leq \varepsilon_p \quad (\text{maksimālās novirzes kritērijs}); \quad (114)$$

$$\frac{1}{N} \sum (A_{i,k}^* - \tilde{A}_{i,k}) \leq \varepsilon_p \quad (\text{vidējās novirzes kritērijs}); \quad (115)$$

$$\frac{1}{N} \sum (A_{i,k}^* - \tilde{A}_{i,k})^2 \leq \varepsilon_p \quad (\text{vidējās kvadrātiskās novirzes kritērijs}), \quad (116)$$

kur  $N$  – kopējais režģa mezglu skaits (arī kopējais vienādojumu sistēmas nezināmo skaits);  $\varepsilon_{i,k \max}$  – vislielākā no visos  $N$  mezglos izskaitļotajām  $\varepsilon_{i,k}$  vērtībām;  $\varepsilon_p$  – iepriekš uzdota pieļaujamā kļūda.

Ja nosacījumi (114) – (116) neizpildās, izvēlas jaunu soļa vērtību  $h_2 = h_1/2$ , atrod atrisinājumu un atkārtoti pārbauda nosacījumus (114) – (116). Šādas procedūras turpina tik ilgi, kamēr izvēlēta soļa vērtība nodrošina uzdoto risināšanas precizitāti.

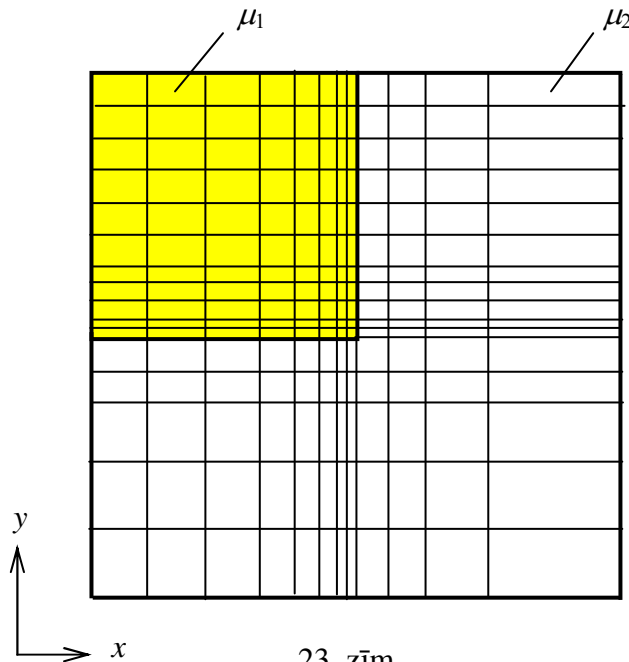
Jāatzīmē, ka aprakstītā kļūdas novērtēšana un ar to saistītā soļu izvēle ir ļoti darbietilpīgs process, tāpēc praksē parasti vadās, galvenokārt, no pieredzes līdzīgu uzdevumu risināšanā. Tomēr var atzīmēt dažas vispārīgas rekomendācijas galīgo diferencu metodes praktiskā izmantošanā. Šīs rekomendācijas izriet no tā apstākļa, ka nemainīga un vienlaikus pietiekami maza soļa izvēle palielina risināmo vienādojumu skaitu, kas nepieciešams precizitātes paaugstināšanai. Vienlaikus nemainīga soļa izvēle ievērojami vienkāršo vienādojumu sastādīšanu, par ko liecina vienādojuma (112) forma, kurā figurē tikai divas no soļa neatkarīgas koeficientu vērtības: 1 un -4. Ja kaut kādu iemeslu dēļ vēlams samazināt risināmo vienādojumu skaitu, var izvēlēties nevienmērīgu soli un risināšanai izmantot (105) vai (110) tipa vienādojumus. Lai vienlaikus ar šādu nevienmērīga soļa izvēli nodrošinātu pietiekamu precizitāti, aprēķina apgabala zonās ar straujāku vektoriālā potenciāla izmaiņu (lielāku gradientu) izvēlas mazāku soli, bet pārējās zonās lielāku soli. Šādas palielināta potenciāla gradienta zonas ir vides ar feromagnētiku materiālu, kā arī parasti zonas to robežu tuvumā, kas atdala vides ar ievērojami atšķirīgām magnētiskām īpašībām (piemēram, gaiss – feromagnētisks materiāls). Režģa izveidošanas un soļa izvēles princips šādam gadījumam ilustrēts 23. zīmējumā, kur pieņemts, ka  $\mu_1 > \mu_2$ .

Nobeigumā var atzīmēt, ka galīgo diferencu metodes galvenā priekšrocība ir tās vienkāršais algoritms. Tas saistīts ar apstākli, ka vienādojumu struktūra visiem  $i, k$  mezgliem ir vienāda: katrs vienādojums satur vienāda skaita un vienādas formas



locekļus un piecus nezināmos lielumus. Galīgo diferencu metodes algoritma vienkāršība it sevišķi izpaužas gadījumā, ja risināta tiek vienādojumu (112) sistēma, kas atbilst režģim ar nemainīgu soli. Sajā gadījumā atsevišķu mezglu vienādojumiem ir ne tikai vienāda struktūra, bet arī vienādi koeficienti un tāpēc sistēmas matricas sastādīšanai var izmantot ļoti vienkāršas (tajā skaitā lietotāja sastādītas) datorprogrammas, kas ļauj maksimāli automatizēt visu risināšanas procesu.

Galīgo diferencu metodes galvenais trūkums ir saistīts ar to apstākli, ka aprēķina režģis tiek veidots no taisnām līnijām, kas paralēlas taisnleņķa koordinātu sistēmas asīm  $x$  un  $y$ . Šī iemesla dēļ rodas būtiskas problēmas, konstruējot režģi līklīniju robežu tuvumā, kā arī tādu robežu tuvumā, kas nav paralēlas nevienai no koordinātu asīm. Šādas robežas iespējams aproksimēt tikai ar lauztām līnijām, kas, savukārt, palielina aprēķina kļūdu un uzstāda papildus prasības attiecībā uz soļa izvēli.



23. zīm.

Ievērojot minētos apsvērumus, galīgo diferencu metodes izmantošana elektrisko mašīnu magnētisko lauku aprēķinos vairumā gadījumu nav efektīva un tāpēc šo metodi parasti lieto tikai samērā vienkāršu uzdevumu risināšanai lokālos apgabalos (piemēram, statora vai rotora zobu slānis ar taisnstūrainām rievām un zobiem, poli ar taisnstūra formas uzgaļiem u.tml.).

## 5.2. Galīgo elementu metode

Galīgo elementu metodes būtība ir tā, ka nepārtraukta vide tiek aizstāta ar galīga skaita diskretu elementu kopumu, kas aplūkoti kā atsevišķi magnētiskās ķēdes elementi un kas veido aprēķina apgabalu pārklājošu režģi. Visvienkāršākie elementi ir trīsstūrveida elementi, jo šādu elementu viennozīmīgai aprakstīšanai pietiek ar trīs lielumiem, jeb trīs virsotņu koordinātām. Turklāt trīsstūrveida elementi, pārklājot ar tiem aprēķina apgabalu, ļauj pietiekami precīzi aproksimēt jebkuras formas līklīnijas robežas (24. zīm.).

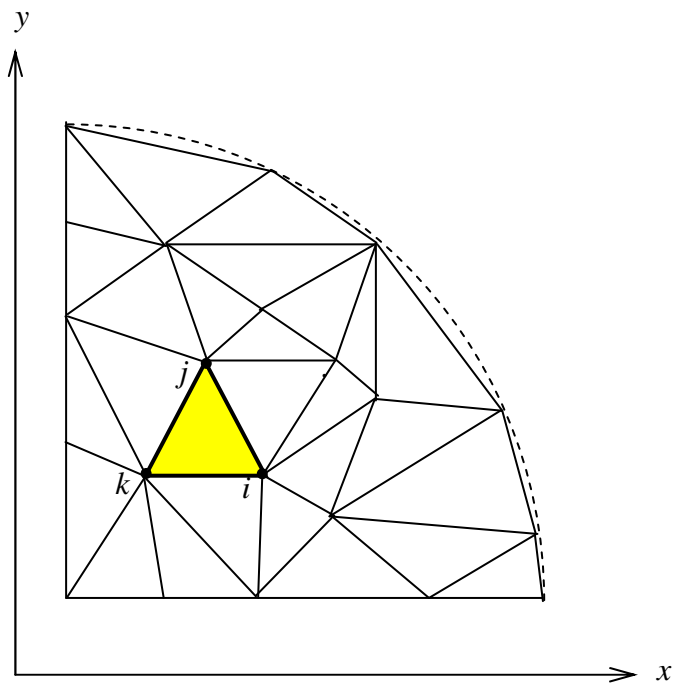
Galīgo elementu metodē pieņem, ka vektoriālā potenciāla sadalījums katra trīsstūra robežās mainās lineāri atkarībā no koordinātām  $x$  un  $y$ :

$$A = a + bx + cy. \quad (117)$$

Lai iegūtu galīgo elementu metodes vienādojumus, konstruē no trīstūriem veidotu režģi (24. zīm.), kurā trīstūru virsotnes vienlaikus ir arī režģa mezgli.

Apzīmēsim ar  $i, j, k$  kaut kāda trīstūra virsotnes, ar  $x_i, x_j, x_k, y_i, y_j, y_k$  – šo virsotņu koordinātas, bet ar  $A_i, A_j, A_k$  – vektoriālā potenciāla vērtības aplūkojamās trīstūra virsotnēs. Tad no izteiksmes (117), piemērojot to trīstūra virsotnēm  $i, j, k$ , var iegūt vienādojumu sistēmu

$$\begin{aligned} A_i &= a + bx_i + cy_i, \\ A_j &= a + bx_j + cy_j, \\ A_k &= a + bx_k + cy_k. \end{aligned} \quad (118)$$



24. zīm

Izsakot no šīs sistēmas lielumus  $a, b$  un  $c$ , iegūstam

$$a = \frac{1}{2S} [(x_j y_k - x_k y_j) A_i + (x_k y_i - x_i y_k) A_j + (x_i y_j - x_j y_i) A_k], \quad (119)$$

$$b = \frac{1}{2S} [(y_j - y_k) A_i + (y_k - y_i) A_j + (y_i - y_j) A_k], \quad (120)$$

$$c = \frac{1}{2S} [(x_k - x_j) A_i + (x_i - x_k) A_j + (x_j - x_i) A_k]. \quad (121)$$

kur  $S$  – trīstūra laukums, turklāt [2]

$$S = \frac{1}{2} [x_i(y_j - y_k) + x_j(y_k - y_i) + x_k(y_i - y_j)]. \quad (122)$$

Trīsstūra laukuma pozitīvas vērtības un lielumu  $a$ ,  $b$ ,  $c$  pareizas zīmes iegūstamas, numurējot trīsstūra virsotnes pulksteņa rādītāja kustībai pretējā virzienā.

Ievietojot lielumu  $a$ ,  $b$  un  $c$  vērtības no (119) – (121) izteiksmē (117), iegūstam izteiksmi, kas nosaka vektoriālā potenciāla vērtību jebkurā trīsstūra punktā atkarībā no tā vērtībām trīsstūra virsotnēs:

$$A = \frac{1}{2S} [(a_i + b_i x + c_i y)A_i + (a_j + b_j x + c_j y)A_j + (a_k + b_k x + c_k y)A_k], \quad (123)$$

kur saīsinājuma dēļ izmantoti apzīmējumi

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j, \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k, \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i; \end{aligned} \quad (124)$$

$$\begin{aligned} b_i &= y_j - y_k, \\ b_j &= y_k - y_i, \\ b_k &= y_i - y_j; \end{aligned} \quad (125)$$

$$\begin{aligned} c_i &= x_k - x_j, \\ c_j &= x_i - x_k, \\ c_k &= x_j - x_i. \end{aligned} \quad (126)$$

Ievērojot (125) un (122), trīsstūra laukumu var izteikt kā

$$S = \frac{1}{2} (x_i b_i + x_j b_j + x_k b_k). \quad (127)$$

Magnētiskās indukcijas vektora komponentes  $B_x$  un  $B_y$  katrā trīsstūrī var atrast, ievietojot izteiksmēs (46) un (47) vektoriālā potenciāla  $A$  vērtības no (123). Tad, izmantojot parciālās diferencēšanas likumus [2], iegūstam

$$B_x = \frac{1}{2S} (c_i A_i + c_j A_j + c_k A_k), \quad (128)$$

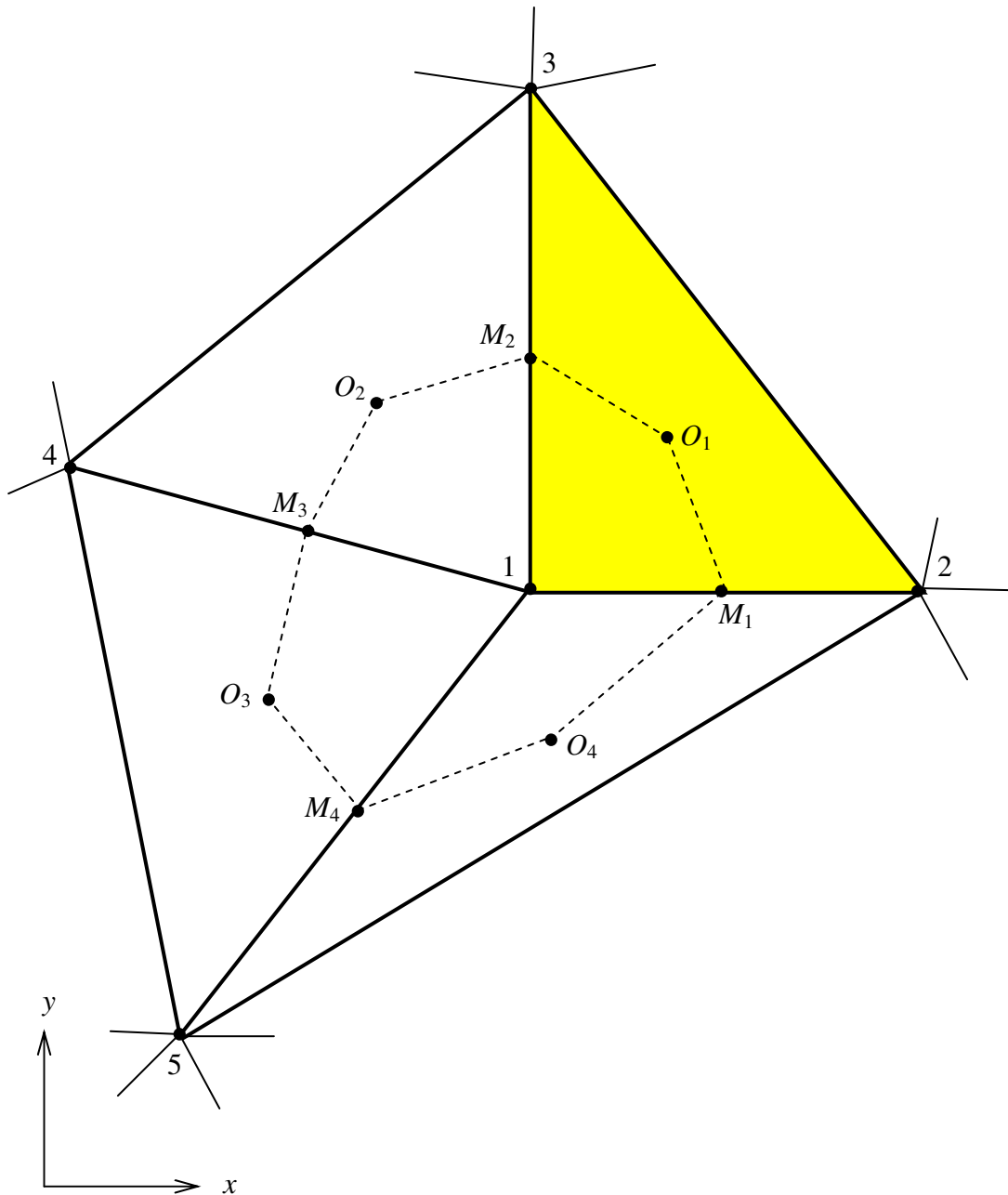
$$B_y = -\frac{1}{2S} (b_i A_i + b_j A_j + b_k A_k). \quad (129)$$

Var atzīmēt, ka, aproksimējot vektoriālo potenciālu ar lineāru funkciju (117), magnētiskās indukcijas vektora komponentes  $B_x$  un  $B_y$ , kā arī šī vektora modulis

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \quad (130)$$

katra trīsstūra robežās ir konstants lielums.

Galīgo elementu metodes vienādojumu iegūšanai var izmantot dažādas pieejas. Šeit aplūkosim vienu no vienkāršākajiem, kurā par pamatu ņemts pilnās strāvas likums integrālā formā (sk. (6)). 25. zīmējumā attēlots aprēķina režģa fragments, ko veido 4 trīsstūri ar kopēju virsotni mezglā 1. (Vispārīgā gadījumā trīsstūru skaits ar kopēju virsotni kādā mezglā var būt  $m \geq 3$ ).



25. zīm.

Ja katra trīsstūra malu viduspunktus (punktus  $M_1, M_2, M_3, M_4$ ) savieno ar šo trīsstūru smagumu centriem (punktiem  $O_1, O_2, O_3, O_4$ ), iegūst noslēgtu lauztu līniju  $M_1O_1M_2O_2M_3O_3M_4O_4M_1$ , kura aptver mezglu 1. Saskaņā ar (6) uzrakstīsim vektora

$\bar{H}$  līnijintegrāli, par integrēšanas kontūru izvēloties šo noslēgto līniju. Vienādojuma (6) kreiso pusi var izteikt kā atsevišķu integrāļu summu, kas aprēķināta lauktās līnijas atsevišķiem posmiem  $M_1O_1$ ,  $O_1M_2$ ,  $M_2O_2$ ,  $O_2M_3$ ,  $M_3O_3$ ,  $O_3M_4$ ,  $M_4O_4$ ,  $O_4M_1$  katrā trīsstūrī. Savukārt, vienādojuma (6) labo pusi var izteikt kā strāvu  $i_m$  summu, kur  $i_m$  – strāva, kas plūst caur šķērsriezumu, ko veido četrstūri  $M_1O_1M_2O_1$ ,  $M_2O_2M_3O_2$ ,  $M_3O_3M_4O_3$ ,  $M_4O_4M_1O_4$ . Tā kā katra šāda četrstūra laukums ir vienāds ar  $1/3$  no  $m$ -tā trīsstūra laukuma, tad

$$i_m = j_m \frac{S_m}{3}, \quad (131)$$

kur  $j_m$  –  $m$ -tā trīsstūra strāvas blīvums.

Ievērojot to, vienādojuma (6) vietā var uzrakstīt

$$\begin{aligned} & \int_{M_1}^{O_1} \bar{H}_1 d\bar{l} + \int_{O_1}^{M_2} \bar{H}_1 d\bar{l} + \int_{M_2}^{O_2} \bar{H}_2 d\bar{l} + \int_{O_2}^{M_3} \bar{H}_2 d\bar{l} + \\ & + \int_{M_3}^{O_3} \bar{H}_3 d\bar{l} + \int_{O_3}^{M_4} \bar{H}_3 d\bar{l} + \int_{M_4}^{O_4} \bar{H}_4 d\bar{l} + \int_{O_4}^{M_1} \bar{H}_4 d\bar{l} = \\ & = j_1 \frac{S_1}{3} + j_2 \frac{S_2}{3} + j_3 \frac{S_3}{3} + j_4 \frac{S_4}{3}, \end{aligned} \quad (132)$$

jeb saīsinātā veidā,

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = i_1 + i_2 + i_3 + i_4. \quad (133)$$

kur ieviesti šādi apzīmējumi:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{M_1}^{O_1} \bar{H}_1 d\bar{l} + \int_{O_1}^{M_2} \bar{H}_1 d\bar{l}, & I_2 &= \int_{M_2}^{O_2} \bar{H}_2 d\bar{l} + \int_{O_2}^{M_3} \bar{H}_2 d\bar{l}, \\ I_3 &= \int_{M_3}^{O_3} \bar{H}_3 d\bar{l} + \int_{O_3}^{M_4} \bar{H}_3 d\bar{l}, & I_4 &= \int_{M_4}^{O_4} \bar{H}_4 d\bar{l} + \int_{O_4}^{M_1} \bar{H}_4 d\bar{l}; \\ i_1 &= j_1 \frac{S_1}{3}, & i_2 &= j_2 \frac{S_2}{3}, & i_3 &= j_3 \frac{S_3}{3}, & i_4 &= j_4 \frac{S_4}{3}. \end{aligned} \quad (134)$$

Tā kā vienādojumā (133) visi kreisās puses locekļi pēc struktūras ir vienādi, detalizētāk aplūkosim tikai pirmo no tiem, t.i.,  $I_1$ , kas atbilst trīsstūrim  $m=1$ .

Aizstājot  $I_1$  izteiksmē  $\bar{H}_1$  ar  $\frac{1}{\mu_1} \bar{B}_1 = \nu_1 \bar{B}_1$ , iegūstam

$$I_1 = \nu_1 \int_{M_1}^{O_1} \bar{B}_1 d\bar{l} + \nu_2 \int_{O_1}^{M_2} \bar{B}_1 d\bar{l}. \quad (136)$$

Šeit un turpmāk magnētiskā caurlaidība  $\mu$  izteikta ar īpatnējo magnētisko pretestību  $\nu$ :

$$\nu = \frac{1}{\mu}. \quad (137)$$

Līnijintegrāļa aprēķināšanu izteiksmē (136) var aizstāt ar noteiktā integrāļa aprēķināšanu, ja zemintegrāļa izteiksmi izsaka parametriskā formā

$$\bar{B}_1 d\bar{l} = B_{x1} dx + B_{y1} dy, \quad (138)$$

bet par integrēšanas robežām ņem integrēšanas intervālu galapunktu koordinātas. Tad (136) vietā iegūstam

$$I_1 = \nu_1 \int_{x_{M1}}^{x_{O1}} B_{x1} dx + \nu_1 \int_{y_{M1}}^{y_{O1}} B_{y1} dy + \nu_1 \int_{x_{O1}}^{x_{M2}} B_{x1} dx + \nu_1 \int_{y_{O1}}^{y_{M2}} B_{y1} dy, \quad (139)$$

jeb

$$I_1 = \nu_1 \int_{x_{M1}}^{x_{M2}} B_{x1} dx + \nu_1 \int_{y_{M1}}^{y_{M2}} B_{y1} dy. \quad (140)$$

Jebkura trīsstūra robežās  $B_{x1} = \text{const}$  un  $B_{y1} = \text{const}$ , tāpēc, integrējot (140) iegūstam

$$I_1 = \nu_1 B_{x1} (x_{M2} - x_{M1}) + \nu_1 B_{y1} (y_{M2} - y_{M1}) \quad (141)$$

Tā kā (sk. 25. zīm.)

$$x_{M1} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad x_{M2} = \frac{x_1 + x_3}{2}, \quad y_{M1} = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad y_{M2} = \frac{y_1 + y_3}{2}, \quad (142)$$

tad, ievietojot šīs vērtības izteiksmē (141), iegūstam

$$I_1 = \nu_1 B_{x1} \frac{x_3 - x_2}{2} + \nu_1 B_{y1} \frac{y_3 - y_2}{2}, \quad (143)$$

jeb, ievērojot (125) un (126),

$$I_1 = \frac{\nu_1}{2} (c_1 B_{x1} - b_1 B_{y1}). \quad (144)$$

Ievietojot izteiksmē (144)  $B_{x1}$  un  $B_{y1}$  vērtības no (128) un (129) un ievērojot trīsstūra  $m=1$  virsotņu numerāciju ( $i=1, j=2, k=3$ ), pēc attiecīgo locekļu sagrupēšanas iegūstam

$$I_1 = \frac{\nu_1}{4S_1} [(c_1^2 + b_1^2)A_1 + (c_1 c_2 + b_1 b_2)A_2 + (c_1 c_3 + b_1 b_3)A_3]. \quad (145)$$

Līdzīgā veidā var iegūt pārējos vienādojuma (133) kreisās puses locekļus  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ , kas atbilst trīsstūriem  $m = 2, 3, 4$ , formāli izmainot (145) vienādojuma attiecīgo lielumu indeksus saskaņā ar 2. tabulu.

2. tabula

Trīsstūra numurs $m$	Mezglu numurs		
	$i$	$j$	$k$
1	1	2	3
2	1	3	4
3	1	4	5
4	1	5	2

Tad, ievietojot iegūtās  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$  un  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$ ,  $i_4$  vērtības vienādojumā (133), iegūstam

$$\begin{aligned}
 & \frac{V_1}{4S_1} [(c_1^2 + b_1^2)A_1 + (c_1c_2 + b_1b_2)A_2 + (c_1c_3 + b_1b_3)A_3] + \\
 & + \frac{V_2}{4S_2} [(c_1^2 + b_1^2)A_1 + (c_1c_3 + b_1b_3)A_3 + (c_1c_4 + b_1b_4)A_4] + \\
 & + \frac{V_3}{4S_3} [(c_1^2 + b_1^2)A_1 + (c_1c_4 + b_1b_4)A_4 + (c_1c_5 + b_1b_5)A_5] + \\
 & + \frac{V_4}{4S_4} [(c_1^2 + b_1^2)A_1 + (c_1c_5 + b_1b_5)A_5 + (c_1c_2 + b_1b_2)A_2] = \\
 & = j_1 \frac{S_1}{3} + j_2 \frac{S_2}{3} + j_3 \frac{S_3}{3} + j_4 \frac{S_4}{3}.
 \end{aligned} \tag{146}$$

Šāda tipa vienādojumu var uzrakstīt visiem aprēķina apgabala trīsstūru režģa mezgliem, ievērojot mezglu un trīsstūru numerāciju, ko veic pirms vienādojumu sastādīšanas. Rezultātā iegūst vienādojumu sistēmu, kurā (146) veida vienādojumu skaits ir vienāds ar kopējo režģa mezglu skaitu. Savukārt, katra vienādojuma kreisā puse satur (145) veida, bet labā puse – (135) veida locekļus, kuru skaits ir vienāds ar to trīsstūru skaitu, kuriem ir kopēja virsotne aplūkojamā mezglā. Atrisinot šo vienādojumu sistēmu, atrod vektoriālā potenciāla vērtības fiksētos mezglos kā vērtību  $A_i = A(x_i, y_i)$  kopu, kas nozīmē funkcijas  $A(x, y)$  uzdošanu tabulas veidā. Vienādojumu sistēmas risināšanu veic ar zināmām (sk., piemēram, [1]) metodēm, izmantojot datortehniku. Īstenībā sistēmas risināmo vienādojumu (un tātad nezināmo) skaits ir mazāks nekā kopējais režģa mezglu skaits, ja uz kādas no robežām ir uzdoti pirmā veida robežnosacījumi. Tas nozīmē, ka mezglos, kas atrodas uz šādām robežām, vektoriālā potenciāla vērtības ir zināmas un attiecīgo mezglu vienādojumos parādās kā konstantes.

Jāatzīmē, ka, risinot elektrisko mašīnu magnētiskā lauka uzdevumus, galīgo elementu metodes vienādojumi ir nelineāri vienādojumi, jo  $v$  vērtības, kas ietilpst šajos vienādojumos, ir atkarīgas no magnētiskās indukcijas  $B$  vērtības aplūkojamā trīsstūrī ( $v = f(B)$ ). Tāpēc vienādojumu sistēmas risināšanai izmanto iterāciju metodi, kuras būtība ir šāda. Pirmajā tuvinājumā pieņem kaut kādas patvaļīgas  $v = v^{(1)}$  vērtības

katrā trīsstūrī, kuras ievieto atbilstošos sistēmas vienādojumus un šo sistēmu risina kā lineāru vienādojumu sistēmu. Risināšanas rezultātā atrod vektoriālā potenciāla pirmo tuvinājumu  $A_i^{(1)}$  un pēc formulām (128), (129), (130) katram trīsstūrim aprēķina  $B_x^{(1)}$ ,  $B_y^{(1)}$  un  $B^{(1)}$ . No dotā magnētiskā materiāla funkcionālās sakarības  $\nu = f(B)$  atrod  $\nu$  vērtību otro tuvinājumu  $\nu = \nu^{(2)}$ , ko ievieto vienādojumos vektoriālā potenciāla nākošā tuvinājuma  $A_i^{(2)}$  atrašanai. Šādu iterāciju procesu turpina tik ilgi, kamēr kārtējā un iepriekšējā tuvinājuma  $A_i$  vērtību starpība nepārsniedz kaut kādu iepriekš uzdotu pieļaujamās kļūdas vērtību. Iterāciju skaita izvēlei, risinot nelineārus magnētiskā lauka vienādojumus, tiek izmantoti speciāli kritēriji (sk arī 5.1.).

Galīgo elementu metodes aprēķina vienādojumu sastādīšana ir ļoti darbietilpīgs process, jo: 1) jāizvēlas režģa konfigurācija (trīsstūru izmēri un forma); 2) jānosaka mezglu koordinātas; 3) jāaprēķina vienādojumu sistēmas koeficientu skaitliskās vērtības; 4) jāastāda sistēmas matrica. Ievērojot to, ka praksē risināmie uzdevumi var saturēt vairākus simtus vai pat vairākus tūkstošus vienādojumu, galīgo elementu metode ir efektīva tikai tad, ja visas iepriekš minētās procedūras ir maksimāli automatizētas. Šim nolūkam kalpo dažādas datorprogrammas, kuru izmantošana detalizēti iztirzāta 6. nodaļā.

Neskatoties uz to, ka salīdzinājumā ar galīgo diferencu metodi galīgo elementu metodes algoritms (aprēķina režģa konstruēšana, vienādojumu struktūra u.c.) ir sarežģītāks, galīgo elementu metodi var uzskatīt par universālu praktiskā lietojuma ziņā. Ar šo metodi ir iespējams risināt uzdevumus sarežģītas konfigurācijas apgabalos, kas satur vides ar ievērojami atšķirīgām magnētiskām īpašībām un nelineārām magnētiskajām raksturlīknēm. Šī iemesla dēļ mūsdienās galīgo elementu metode tiek plaši lietota, pētot elektromagnētiskos laukus dažādās elektrotehniskajās iekārtās, īpaši efektīvi – elektriskajās mašīnās. Galīgo elementu metodes plašo lietošanu nosaka vēl arī šodien pieejamās lietīšķās datorprogrammas, kuras izmantojamas šīs metodes efektīvai realizēšanai.

## **6. Magnētiskā lauka aprēķina datorprogrammu komplekss un tā praktiskā izmantošana**

### **6.1. Programmu kompleksa struktūra un pamatfunkcijas**

Datorprogrammu komplekss paredzēts magnētisko lauku aprēķināšanai, veicot tādas pamatoperācijas kā aprēķina režģa ģenerēšanu, vienādojumu sastādīšanu un to risināšanu. Komplekss izstrādāts RTU un sastāv no divām neatkarīgām FORTRAN programmām – TRIANGA un TRISERV.

Programma TRIANGA veic datu sagatavošanu galīgo elementu režģa ģenerēšanai un automātisku šī režģa ģenerēšanu (triangulāciju), izmantojot informāciju par aprēķina apgabala konfigurāciju (topoloģiju), kā arī veic virkni operāciju, kas saistītas ar ģenērētā režģa datu apstrādi.

Programma TRISERV, izmantojot informāciju par ģenērēto režģi un pētāmā objekta fizikālo parametru skaitliskajām vērtībām, realizē galīgo elementu metodes vienādojumu sistēmas sastādīšanu, šo vienādojumu risināšanu, kā arī operācijas, kas saistītas ar risināšanas procesa vadību un iegūto datu apstrādi.



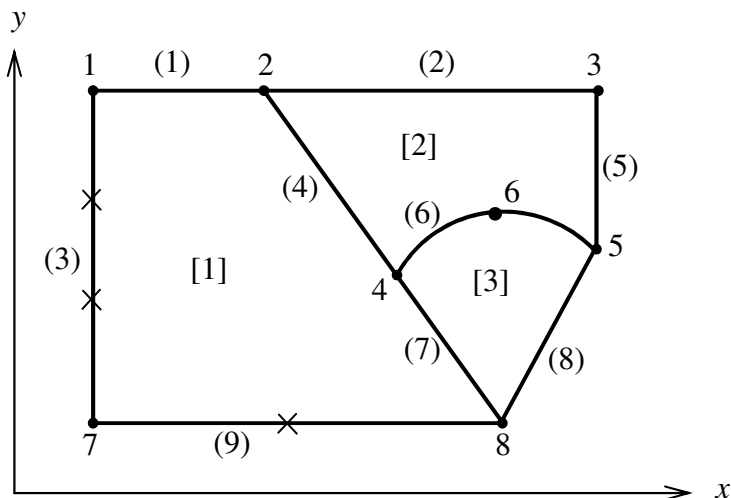
## 6.2. Programmas TRIANGA ievaddati un to sagatavošana

### 6.2.1. Aprēķina apgabala topoloģiskā modeļa konstruēšana un tā parametru noteikšana

Programmas TRIANGA ievaddatu sagatavošana ietver divus posmus:

- topoloģiskā modeļa konstruēšanu un tā aprakstīšanu;
- ievaddatu faila sagatavošanu atbilstoši programmā paredzētai struktūrai un formātam.

Aprēķina apgabala topoloģijas aprakstīšana šajā gadījumā nozīmē ģeometriskā objekta attēlošanu skaitliskas informācijas veidā. Šim nolūkam izmanto tādus jēdzienus, kā bāzes apakšapgabali, bāzes līnijas un bāzes mezgli.



- 1, 2, 3, ... – bāzes mezgli
- (1), (2), (3), ... – bāzes līnijas
- [1], [2], [3] – bāzes apakšapgabali

26. zīm.

Aprēķina apgabalu var aplūkot kā atsevišķu apgabalu – bāzes apakšapgabalu kopu. Katra bāzes apakšapgabala robeža veidojas kā bāzes līniju kopa. Savukārt, bāzes līnijām ir kopēji punkti, ko sauc par bāzes mezgliem. Lai viennozīmīgi raksturotu šādus bāzes elementus (apakšapgabalus, līnijas, mezglus) un to savstarpējo saistību, katram no elementiem piešķir savu unikālu numerāciju. 26. zīmējumā attēlots aprēķina apgabals ar trīs apakšapgabaliem. Bāzes apakšapgabalu 1 veido bāzes līnijas 1, 3, 9, 7, 4, bāzes apakšapgabalu 2 – bāzes līnijas 2, 4, 6, 5, bāzes apakšapgabalu 3 – bāzes līnijas 6, 7, 8. Savukārt, bāzes līnija 1 satur bāzes mezglus 1, 2, bāzes līnija 2 – bāzes mezglus 2, 3, bāzes līnija 3 – bāzes mezglus 1, 7 utt. Bāzes līnijas var būt ne tikai taisnes nogriežņi, bet arī riņķa līnijas loki. Šādas līnijas jāapraksta ar trīs bāzes mezgliem, piemēram, bāzes līnija 6 ar mezgliem 4, 6, 5. Aprēķina apgabala topoloģijas pilnīgai aprakstīšanai vēl nepieciešams uzdot bāzes mezglu koordinātas.

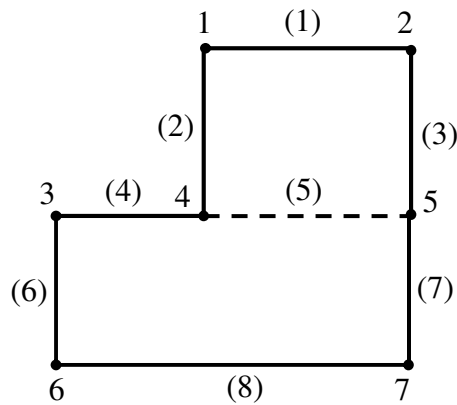
Lai iegūtu vēlamo ģenērētā trīsstūru režģa konfigurāciju, piemēram, smalkāku režģi kaut kādā aprēķina apgabala zonā, bāzes līnijas var sadalīt nogriežņos, paredzot uz šīm līnijām papildmezglus, jeb diskretizācijas mezglus. Tā, piemēram uz līnijām 3 un 9 šādi mezgli apzīmēti ar “x”. Tādējādi bāzes apakšapgabalu aptverošais kontūrs

veidojas kā daudzstūris no taisniem nogriežņiem. Programma TRIANGA trīsstūru režģi konstruē katram bāzes apakšapgabalam atsevišķi, izmantojot speciālu algoritmu.

Aprēķina apgabala topoloģiskā modeļa konstruēšanu un tā aprakstīšanu veic šādā secībā.

1) Taisnleņķa koordinātu sistēmas pirmajā kvadrantā brīvi izvēlētā mērogā uzzīmē aprēķina apgabalu. Apgabala robežas ieteicams savietot ar koordinātu asīm.

2) Aprēķina apgabalu sadala apakšapgabalos, tiem piešķirot numurus 1, 2, 3, ...,  $NA$ , kur  $NA$  – kopējais topoloģiskā modeļa apakšapgabalu skaits. Numerācija jāsāk ar 1 un tai jābūt nepārtrauktai. Katram apakšapgabalam pilnībā jāatrodas viendabīgā vidē. Zonas, kurās ir magnētiskā lauka avoti (tinuma spoļu malas, rievas ar vadiem u.tml.), jāizdala kā atsevišķi apakšapgabali, turklāt tā, lai katra šāda apakšapgabala robežās strāvas blīvumi būtu vienādi visos pētāmos mašīnas režīmos. Bāzes apakšapgabaliem jābūt izliektiem, t.i., to kontūru veidojošā daudzstūra iekšējie leņķi nedrīkst būt lielāki par  $180^{\circ}$ . Šī nosacījuma izpildei fizikāli viendabīgas aprēķina apgabala daļas jāsadala vairākos apakšapgabalos, paredzot papildus bāzes līnijas (piemēram, pārtrauktā līnija 6 27. zīmējumā).



27. zīm.

Katra bāzes apakšapgabala materiālam jāpiešķir identifikācijas numurs: 1, 2, ...,  $NMAT$ , kur  $NMAT$  – kopējais dažādo magnētisko materiālu skaits aprēķina apgabalā. Numerācija jāsāk ar 1 un tai jābūt nepārtrauktai. Ja vairākiem apakšapgabaliem visos pētāmos variantos ir vienādi materiāli, tos lietderīgi apzīmēt ar vienādiem identifikācijas numuriem.

3) No aprēķina apgabala zīmējuma nosaka bāzes līniju skaitu un to tipu, un visām līnijām piešķir numurus 1, 2, 3, ...,  $NL$ , kur  $NL$  – kopējais aprēķina apgabala bāzes līniju skaits. Numerācija jāsāk ar 1 un tai jābūt nepārtrauktai. Programmā TRIANGA paredzētas divu tipu bāzes līnijas – taisnes nogriežņi un riņķa līnijas loki. Bāzes līnijas saskaras tikai ar saviem galu mezgliem. Tāpēc, neraugoties uz to, ka atsevišķas aprēķina apgabala robežas ir taisnas līnijas, tās tiek sadalītas vairākās bāzes līnijās (piemērā, 26. zīmējumā attēlotā apgabala robeža, kas iet caur mezgliem 2, 4, 8, ir sadalīta divās bāzes līnijās – 4 un 7.

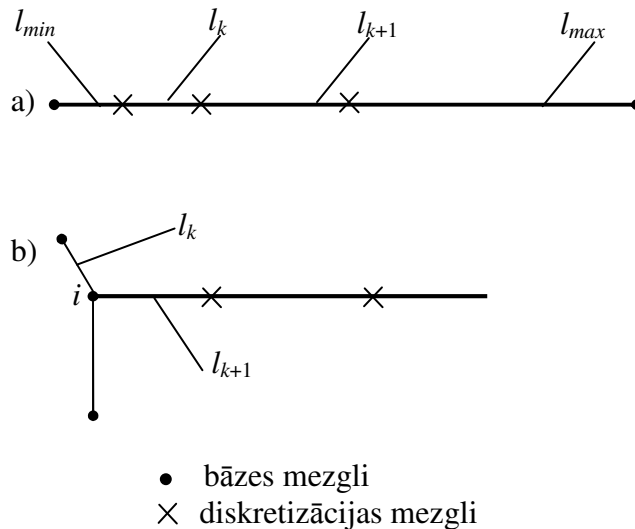
4) Uz katras bāzes līnijas nosaka diskretizācijas mezglu skaitu un šo mezglu sablīvējuma koeficientu. Tas kalpo par papildu informāciju trīsstūru režģa konstruēšanai katra apakšapgabala robežās un tādējādi nosaka trīsstūru skaitu un to formu. Izvēloties diskretizācijas mezglu skaitu un to sadalījumu, priekšroka dodama vienmērīgam šo mezglu sadalījumam uz bāzes līnijas. Šāds vienmērīgs mezglu sadalījums triangulācijas procesā nodrošina regulāra trīsstūru režģa (režģa, kas sastāv no vienādmalu vai gandrīz vienādmalu trīsstūriem) ģenerēšanu, kas uzskatāms par

optimālāko variantu, lai nodrošinātu pietiekami augstu lauka aprēķina precizitāti. Tomēr šāds regulārs trīsstūru režģis ir saistīts ar režģa kopējā mezglu skaita (un tātad arī ar risināmo vienādojumu skaita) un vienādojumu sistēmas risināšanas laika palielināšanos. Tāpēc, vadoties no galīgo diferencu metodei līdzīgiem principiem, ir lietderīgi paredzēt nevienmērīga trīsstūru režģa ģenerēšanu un tālāku izmantošanu, t.i., tāda režģa, kurā ir laidena pāreja no mazāka izmēra uz lielāka izmēra trīsstūriem.

Vadoties no elektrisko mašīnu magnētisko lauku aprēķinu pieredzes, var rekomendēt šādu attiecību starp blakus nogriežņiem (to garumus nosaka bāzes mezglu un diskretizācijas mezglu sadalījums):

$$\frac{1}{3} \leq \frac{l_{k+1}}{l_k} \leq 3, \quad (147)$$

kur  $l_k$  un  $l_{k+1}$  – blakus nogriežņu garumi (sk. 28. zīm.).



28. zīm.

Sakarība (147) attiecināma arī uz nogriežņiem ar kopēju bāzes mezglu  $i$  (28. zīm. b).

Diskretizācijas mezglus nepieskaita bāzes mezgliem un programmā TRIANGA informācija par šiem mezgliem satur tikai divus lielumus – diskretizācijas mezglu skaitu uz bāzes līnijas un sablīvējuma koeficientu

$$k_s = \frac{l_{\max}}{l_{\min}}. \quad (148)$$

5) Visiem bāzes mezgliem piešķir numurus  $1, 2, 3, \dots, NP$ , kur  $NP$  – kopējais topoloģiskā modeļa bāzes mezglu skaits. Numerācija jāsāk ar 1 un tai jābūt nepārtrauktai. Uz lokveida bāzes līnijām jāparedz trīs bāzes mezgli, lai programma TRIANGA šīs līnijas varētu identificēt kā riņķa līnijas lokus, kā arī jāparedz vismaz vien diskretizācijas mezgls, jo programma katru lokveida līniju tuvināti aproksimē ar lauztu līniju.

Izmantojot topoloģisko modeli, nosaka visu bāzes mezglu koordinātas  $x_i$  un  $y_i$ . Atsevišķos gadījumos šīs koordinātas ieteicams noteikt nevis grafiski, bet aprēķinu ceļā, lai pietiekami precīzi aprakstītu topoloģisko modeli īpaši tajās zonās, kuras atrodas neliela izmēra gaisa spraugas tuvumā, turklāt minētajās zonās koordinātas jānosaka ar precizitāti vismaz līdz 3 zīmīgajiem cipariem. Bāzes mezglu koordinātas var izteikt jebkurās garuma mērvienībās – milimetros, centimetros, metros u.c.

### 6.2.2. Programmas TRIANGA ievaddatu faila sagatavošana

Programmas TRIANGA darbībai nepieciešamie dati tiek iepriekš noformēti kā noteiktas struktūras atsevišķs fails, kurš programmas izpildes laikā tiek nolasīts atbilstoši programmā noteiktai nolasīšanas operatoru (READ) secībai. Failam jāpiešķir identifikators “**V1 . dat**”, kur **V1** – brīvi izvēlēts un MS DOS prasībām atbilstošs faila vārds, **dat** – obligāts faila vārda paplašinājums.

Programmas TRIANGA ievaddatu fails satur divas datu grupas:

- datus, kas nepieciešami trīsstūru režģa ģenerēšanai (ģenerēšanas dati);
- datus, kas nepieciešami ar ģenerēto režģi saistītu palīgdarbību vadībai un veikšanai (utilītprogrammu izsaukumi).

Pirmās grupas dati – ģenerēšanas dati – satur informāciju par topoloģisko modeli (bāzes apakšapgabaliem, bāzes līnijām, bāzes mezgliem un to raksturojošiem parametriem), kā arī informāciju par ģenerējamā režģa īpašībām. Šīs grupas datiem programmā ir paredzēta noteikta fiksēta struktūra un obligāti ievērojama secība.

Utilītprogrammas būtībā ir apakšprogrammas, kas lietotājam palīdz apstrādāt ar ģenerēto režģi saistīto informāciju, aprakstīt robežnoteikumus, iegūt papildus informāciju par ģenerēto trīsstūra režģi un tā elementiem u.tml. Izpildāmo utilītprogrammu izvēli un to izpildes secību nosaka lietotājs. Biežāk izmantojamo utilītprogrammu saraksts un to funkcijas norādītas 5. tabulā.

Ievaddatu failā dati jāieraksta stingri noteiktās rindiņas pozīcijās. Katram no ievadāmajiem lielumiem programmā TRIANGA paredzēts savs datu ievaddlauks ar noteiktu pozīciju skaitu: parasti veseliem skaitļiem paredzētas 5 pozīcijas, reāliem skaitļiem – 5 vai 10 pozīcijas. Saskaņā ar FORTRAN valodas formatizētās datu ievades noteikumiem skaitliskie dati ievadlaukā ierakstāmi, piekļaujot tos šī lauka labajai malai.

Turpmāk, lai paskaidrotu datu ierakstīšanas noteikumus un to izvietojumu ievaddlauka rindiņās, izmantota šāda apzīmējumu sistēma (sk. 3. tabulu):

1) rindiņas ievadlauki atdalīti viens no otra ar vertikālām līnijām un virs katra ievaddlauka iekavās norādīti pozīciju numuri;

2) veseliem skaitļiem izmantoti simboliskie apzīmējumi, kuri sākas ar burtiem *I, J, K, L, M, N*, bet reāliem skaitļiem apzīmējumi, kuri sākas ar pārējiem latīņu alfabēta burtiem;

3) ar noklusējumu ievadāmajiem lielumiem simboliskie apzīmējumi ietverti kvadrātiekvavās;

4) atsevišķiem lielumiem norādītas tikai fiksētas vērtības;

5) doti paskaidrojumi par ievadāmo lielumu nozīmi un to iespējamām skaitliskajām vērtībām.

### 3. tabula

1-5	6-15	16-20
NA	[CF]	1.33

Piemēram, 3. tabulā izmantotie apzīmējumi un to skaidrojums ir šāds.

NA – apakšapgabala numurs.

CF – mēroga koeficients:

$CF = [1,5]//1,8/ 2,1/$  cita uzdotā vērtība.

1,33 – ievadāmā lieluma fiksēta vērtība.

Rindīņas 1. – 5. pozīcijās ierakstāms apakšapgabala numurs, kas izteikts ar veselu skaitli. 6. – 15. pozīcijās ierakstāma mēroga koeficienta vērtība, kas izteikta ar reālu skaitli; ja šajās pozīcijās neieraksta neko, tas nozīmē, ka programma lieluma CF vērtību pieņem ar noklusējumu, t.i., 1,5, pretējā gadījumā jāievada 1,8, 2,1 vai uzdevuma nosacījumiem atbilstoša cita vērtība. 16. – 20. pozīcijās ierakstāma attiecīgā parametra dotajos apstākļos fiksēta vērtība 1,33.

Var atzīmēt, ka gadījumā, ja kāda ievadāmā parametra vērtība ir 0 (nulle), tad ievadlaukā var ierakstīt vai nu šo vērtību, vai tukšumzīmi, nospiežot klaviatūras atstarpēšanas taustiņu.

Tālāk aplūkosim atsevišķu datu grupu (ģenerēšanas dati, utilītprogrammu saraksts) ierakstīšanas kārtību ievaddatu failā.

#### Ģenerēšanas dati.

Ģenerēšanas dati satur 7 blokus šādā secībā:

- 1) uzdevuma virsraksts;
- 2) programmas režīmi;
- 3) topoloģiskā modeļa galvenie parametri;
- 4) bāzes mezglu koordinātas;
- 5) informācija par bāzes līnijām;
- 6) informācija par simetrijas nosacījumiem;
- 7) informācija par bāzes apgabaliem.

1. Uzdevuma virsraksts. Uzdevuma virsraksts ir lietotāja noteikts komentārs, kas neietekmē programmas darbību, bet ir obligāts. Tas var saturēt jebkādu tekstuālu informāciju, kuru ieraksta, izmantojot jebkurus simbolus (burtus, ciparus, speciālos klaviatūras simbolus). Uzdevuma virsraksts var aizņemt neierobežotu rindīņu skaitu. Pēdējās (vai atsevišķā gadījumā vienīgās) rindīņas 1. – 16. pozīcijās jābūt tukšumzīmēm, bet pārējo rindīņu šajās pozīcijas jābūt vismaz vienam simbolam, kurš nav tukšumzīme.

2. Programmas režīmi. Programmas TRIANGA režīmu dati aizņem vienu rindīņu, kuras struktūra ir šāda:

1-5	6-10	11-15	16-20	21-30
[INXY]	[LINB]	[IS]		1.29

INXY – bāzes mezglu koordinātu ievadīšanas forma:

$INXY = [0]//1/ 2/ 3$  (sīkāk sk. šīs apakšnodaļas 3. punktā – Bāzes mezglu koordinātas).

LINB – bāzes mezglu un diskretizācijas mezglu vizualizācijas indikators:

$LINB = [0]//1.$

Ja vizualizācija paredzēta  $LINB = 1$ , pretējā gadījumā  $LINB = 0$ . Paredzot vizualizāciju, izejdatu failā vai šī faila izdrukā noteiktā mērogā tiek attēlots bāzes mezglu un diskretizācijas mezglu savstarpējais izvietojums. Šāda informācija dažkārt ir nepieciešama, lai pārliecinātos par bāzes mezglu koordinātu ievadīšanas pareizību.

$IS$  – simetrijas pazīme:

$$IS = [0]//1.$$

Ja magnētiskā lauka aprēķina uzdevumā paredzēts uzdot pirmā veida robežnosacījumus netiešā formā,  $IS = 1$ , pretējā gadījumā  $IS = 0$ .

3. Topoloģiskā modeļa galvenie parametri. Topoloģiskā modeļa galvenie parametri nosaka bāzes mezglu, bāzes līniju un bāzes apakšapgabalus skaitu, kā arī ģenerējamā režģa parametru maksimālās vērtības. Dati par topoloģiskā modeļa galvenajiem parametriem aizņem vienu rindiņu, kuras struktūra ir šāda:

1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30
$NP$	$NL$	$NA$	$[NPMX]$	$[NEMX]$	$[NRMX]$

$NP$  – topoloģiskā modeļa kopējais bāzes mezglu skaits.

$NL$  – topoloģiskā modeļa kopējais bāzes līniju skaits.

$NA$  – topoloģiskā modeļa kopējais bāzes apakšapgabalus skaits.

$NPMX$  – pieprasītais ģenerējamā režģa maksimālais mezglu skaits:

$$NPMX = [1000]//\text{cita uzdotā vērtība}.$$

Informācija par mezglu maksimālo skaitu nepieciešama atmiņas apjoma rezervēšanai.

$NEMX$  – pieprasītais ģenerējamā režģa maksimālais trīsstūru skaits:

$$NEMX = [2 \cdot NPMX]//\text{cita uzdotā vērtība}.$$

$NRMX$  – paredzētais topoloģiskā modeļa maksimālais kopējais bāzes mezglu un diskretizācijas mezglu skaits:

$$NRMX = \left[ \frac{NPMX}{3} \right] // \text{cita uzdotā vērtība}.$$

4. Bāzes mezglu koordinātas. Bāzes mezglu koordinātas tiek noteiktas taisnleņķa koordinātu sistēmā un uzdotas jebkurās mērvienībās. Koordinātu datu izvietojums atkarīgs no parametra  $INXY$  (sk. iepriekš).

Ja  $INXY = 0$ , datu struktūra rindiņā ir šāda:

1-5	6-10	11-15	16-20	...	31-35	36-40	41-45	46-50
$X1$	$Y1$	$X2$	$Y2$	...	$X4$	$Y4$	$X5$	$Y5$

$X1, Y1, X2, Y2, \dots$  – bāzes mezglu koordinātas mezglu numuru pieaugošā secībā.

Kopējais rindiņu skaits ar bāzes mezglu koordinātām ir atkarīgs no parametra  $NP$  (sk. iepriekš). Ja  $NP$  nav skaitļa 5 daudzkārtņi, pēdējā rindiņa tiek aizpildīta tikai daļēji.

Ja  $INXY = 1$ , koordinātu ievadīšanas forma ir līdzīga iepriekšējam gadījumam ( $INXY = 0$ ). Atšķirība ir tikai tāda, ka katra rindiņa satur informāciju par 4 bāzes mezglu koordinātām un katrai koordinātas vērtībai paredzētas 10 pozīcijas.

Ja  $INXY = 2$ , viena rindiņa satur informāciju par 10 bāzes mezglu  $x$  koordinātām, bet nākošā rindiņa – informāciju par 10 bāzes mezglu  $y$  koordinātām, turklāt katrai no koordinātu vērtībām paredzētas 5 pozīcijas:

1-5	6-10	11-15	16-20	...	31-35	36-40	41-45	46-50
$X1$	$X2$	$X3$	$X4$	...	$X7$	$X8$	$X9$	$X10$
$Y1$	$Y2$	$Y3$	$Y4$	...	$Y7$	$Y8$	$Y9$	$Y10$

Ja  $INXY = 3$ , koordinātu ievadīšanas forma ir līdzīga gadījumam, kad  $INXY = 2$ . Atšķirība ir tikai tāda, ka katrs rindiņu pāris satur informāciju par 4 bāzes mezglu koordinātām un katrai koordinātas vērtībai paredzētas 10 pozīcijas.

5. Informācija par bāzes līnijām. Informācija par katru bāzes līniju ierakstāma atsevišķā rindiņā, rindiņas izvietojojot vienu zem otras bāzes līniju numuru pieaugošā secībā. Tādējādi kopējo rindiņu skaitu, ko aizņem informācija par bāzes līnijām nosaka parametrs  $NL$  (sk. iepriekš). Katrai bāzes līnijai atbilstošās rindiņas struktūra ir šāda:

1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35
$NUML$	$N1$	$N2$	$N3$	$ID$	$ND$	$SK$

$NUML$  – bāzes līnijas numurs saskaņā ar topoloģisko modeli.

$N1, N2, N3$  – bāzes mezglu numuri, kuri raksturo doto bāzes līniju.

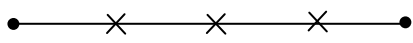
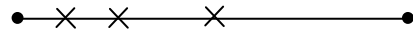
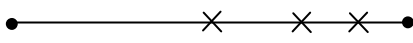
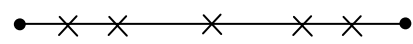
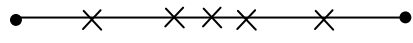
Ja bāzes līnija ir taisnes nogrieznis, tiek ierakstīti tikai mezglu  $N1$  un  $N2$  numuri, bet  $N3 = 0$ ; lokveida bāzes līnijām  $N1$  ir līnijas sākuma bāzes mezgla numurs,  $N2$  – vidējā mezgla numurs, bet  $N3$  – beigu mezgla numurs.

$ID$  – bāzes līniju diskretizācijas veids saskaņā ar 4. tabulu.

$ND$  – diskretizācijas mezglu skaits uz bāzes līnijas.

$SK$  – sablīvējuma koeficients (sk. izteiksmi (148)), ko uzdod tikai diskretizācijas veidiem  $ID = 1,2,3,4$ ; šiem diskretizācijas veidiem nevienmērīgo diskretizācijas mezglu sadalījumu uz bāzes līnijas (blakus nogriežņu garumu attiecību) programma TRIANGA veic atbilstoši aritmētiskās progresijas likumam.

4. tabula

Diskretizācijas veids	Parametrs $ID$
Vienmērīgs sadalījums 	[0]
Sablīvējums līnijas sākumā 	1
Sablīvējums līnijas beigās 	2
Sablīvējums līnijas galos 	3
Sablīvējums līnijas vidū 	4

6. Informācija par simetrijas nosacījumiem. Simetrijas informācijas datu blokam ievaddatu failā jābūt tikai tad, ja uz kādu no ģeometriskās simetrijas asu pāriem, kas ierobežo aprēķina apgabalu, tiek uzdoti pirmā veida robežnosacījumi netiešā formā un parametrs  $IS = 1$  (sk. iepriekš). Informāciju par simetrijas nosacījumiem attiecina uz bāzes līnijām, ar kurām aprakstītas ģeometriski simetriskās aprēķina apgabala robežas.

Katram simetriskam bāzes līniju pārim atbilst viena rindiņa, kuras struktūra ir šāda:

1-5	6-10	11-15	16-20	21-25
<i>LIN1</i>	<i>LIN2</i>	<i>NS1</i>	<i>NS2</i>	<i>ISV</i>

*LIN1*, *LIN2* – simetrisko bāzes līniju numuri uz divām aprēķina apgabala attiecīgajām robežām.

*NS1*, *NS2* – simetrisko bāzes mezglu numuri uz līnijām *LIN1* un *LIN2*.

*ISV* – simetrijas veids:

$$ISV = 1 / -1.$$

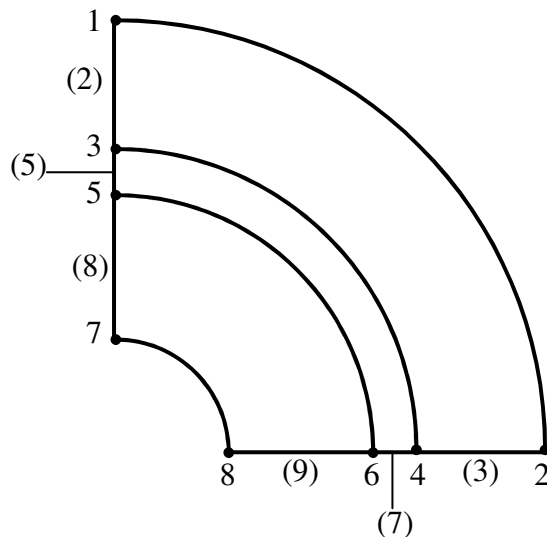
Ja robežnosacījumi uzdoti saskaņā ar vienādību (82),  $ISV = 1$ , ja tie uzdoti saskaņā ar (77),  $ISV = -1$ .

Pēc tam, kad uzskaitīti visu bāzes līniju pāri, uz kuriem attiecas simetrijas nosacījumi, jāievada šādas formas rindiņa:

1-5
99999

99999 – pazīme, pēc kuras notiek pāreja uz nākošā ģenerēšanas datu bloka (7. bloka – Informācija par bāzes apgabaliem) ievadīšanu.

Aplūkosim piemēru simetrijas nosacījumu informācijas ievadīšanai 29. zīmējumā attēlotajam topoloģiskajam modelim, pieņemot, ka uz apgabala divām sānu robežām uzdoti pirmā veida robežnosacījumi netiešā formā saskaņā ar (77).



29. zīm.

Aplūkotajā piemērā simetrijas nosacījumu ievaddatu bloks ir šāds:

1-5	6-10	11-15	16-20	21-25
2	3	3	4	-1
5	7	3	4	-1
8	9	7	8	-1
99999				-1



7. Informācija par bāzes apakšapgabaliem. Informācijai par katru bāzes apakšapgabalu paredzētas divas vai vairāk rindiņas. Pirmajai no šīm rindiņām ir šāda struktūra:

1-5	6-10
<i>NUMA</i>	<i>NUMM</i>

*NUMA* – apakšapgabala numurs saskaņā ar topoloģisko modeli.

*NUMM* – apakšapgabala materiāla identifikācijas numurs, turklāt  $1 \leq NUMM \leq NMA$  (sk. 6.2.1. apakšnodaļas 2. punktu).

Nākošajai rindiņai (vai nākošajām rindiņām) ir šāda struktūra:

1-5	6-10	11-15	...	41-45	46-50	51-55
<i>NUML1</i>	<i>NUML2</i>	<i>NUML3</i>	...			<i>ITU</i>

*NUML1*, *NUML2*, *NUML3* ... – apakšapgabala kontūru veidojošo bāzes līniju numuri.

Bāzes līniju numuri jāpieraksta tādā secībā, kādā tās seko viena otrai, apejot kontūru vienā no virzieniem – pulksteņa rādītāja kustības virzienā vai pulksteņa rādītāja kustībai pretējā virzienā.

*ITU* – bāzes līniju numuru turpinājuma indikators:

$$ITU = [0]//1.$$

Ja apakšapgabalu aptverošo bāzes līniju skaits ir mazāks vai vienāds ar 10, tad *ITU* = 0. Ja tas ir lielāks par 10, *ITU* = 1 un tad pārējo bāzes līniju numuri jāraksta nākošajā rindiņā.

#### **Utilītprogrammu izsaukumi.**

Līdztekus savai galvenajai funkcijai – trīsstūru režģa ģenerēšanai – programma TRIANGA var veikt arī virkni palīgdarbību, kas saistītas ar šo režģi. Šim nolūkam paredzētas speciālas apakšprogrammas – utilītprogrammas, kuras tiek izpildītas pēc lietotāja pieprasījuma. Utilītprogrammas nodrošina: ar ģenerēto režģi un tā parametriem saistītu dažādu informatīva rakstura tabulu izdrukāšanu; režģa vizualizāciju ekrānattēla vai izdrukas veidā; informācijas sagatavošanu par ārējās iedarbes faktoriem; informācijas apmaiņu starp dažādiem programmas objektiem.

Utilītprogrammu izsaukumu saraksts ievaddatu failā seko tūlīn pēc ģenerēšanas datu pēdējā bloka, t.i., informācijas par bāzes apakšapgabaliem.

Atbilstošās utilītprogrammas izsaukšanai ievaddatu failā jāparedz šādas formas rindiņa:

1-5
<i>NUT</i>

*NUT* – utilītprogrammas numurs saskaņā ar 5. tabulu.

Ja utilītprogrammas izpildei nepieciešami papilddati, tos ievada nākošajās rindiņās pēc attiecīgās utilītprogrammas izsaukuma tādā formā, kā tas norādīts turpmākajos paskaidrojumos.

Utilītprogrammas numurs	Izpildāmās funkcijas	Piezīmes
0	Programmas darbības beigas	Pēdējā izsaukamā utilītprogramma
2	Ģenerētā režģa parametru informācijas tabulu izdruka	Utilītprogrammu izmanto ļoti reti
3	Ģenerētā režģa vizualizācija	Utilītprogrammas izpildei nepieciešami papilddati
4	Informācijas sagatavošana par ārējās iedarbes faktoriem	Utilītprogrammas izpildei nepieciešami papilddati
8	Ģenerētā režģa datu ierakstīšana atmiņā tālākai izmantošanai programmā TRISERV un citās programmās	Jāizpilda pēc utilītprogrammas 4
15	Topoloģiskā modeļa bāzes elementu un ģenerētā režģa elementu numerācijas atbilstības tabulu izdruka	Jāizpilda pēc utilītprogrammas 8

Utilītprogrammas 3 papilddati. Šīs utilītprogrammas izpilde ļauj iegūt ekrānattēla vai izdrukas veidā ģenerētā režģa vizuālu ainu. Šāda aina dod iespēju novērtēt ģenerēto režģi un tā piemērotību dotā uzdevuma risināšanai, kā arī konstatēt kļūdas, kas var būt radušās datu sagatavošanas un ievadīšanas procesā. Ar vienu utilītprogrammas 3 izsaukumu var iegūt neierobežota skaita dažādas vizualizācijas. Katrai vizualizācijai paredzēta atsevišķa rindiņa, kuras struktūra ir šāda:

1-5	6-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-55
[IDTN]	[IFV]	[XMIN]	[XMAX]	[YMIN]	[YMAX]	[NJ]

*IDTN* – ģenerētā režģa trīsstūru numuru izdrukāšanas indikators:

$$IDTN = [0]//1.$$

Ja *IDTN* = 1, ģenerētā režģa attēlā ir norādīti trīsstūru numuri atbilstoši programmas TRIANGA piešķirtai numerācijai, ja *IDTN* = 0, šie numuri netiek norādīti.

*IFV* – vizualizācijas forma:

$$IFV = [0]//1/ 2.$$

Ja *IFV* = 0, tiek attēlots viss aprēķina apgabala režģis (nākošie rindiņas ievadlauki šajā gadījumā netiek aizpildīti). Ja aprēķina apgabala platums (izmērs *x* ass virzienā) vairākkārt pārsniedz tā augstumu (izmēru *y* ass virzienā), šādā apgabalā ģenerētā režģa attēls tiek sadalīts vertikālās joslās, kuru skaitu *NJ* programma izvēlas automātiski. Katra no šīm joslām tiek attēlota viena zem otras kā atsevišķa vizualizācija. Ja *IFV* = 1, nākošajos ievadlaukos jānorāda vizualizācijai paredzētā fragmenta robežas *XMIN*, *XMAX*, *YMIN*, *YMAX*, un tad tiek veikta ģenerētā režģa atsevišķa fragmenta vizualizācija. Vizualizējamā fragmenta joslu skaitu *NJ* šajā gadījumā nenorāda; programma to izvēlas automātiski tāpat kā tad, ja *IFV* = 0. Ja *IFV* = 2, vizualizācija tiek veikta tāpat kā gadījumā, kad *IFV* = 1, tikai ar to atšķirību, ka tiek norādīts vizualizācijas joslu skaits:

$$NJ = [1]//cita uzdotā vērtība.$$

Kā jau tika atzīmēts, viens utilitprogrammas 3 izsaukums ļauj iegūt jebkura skaita dažādu fragmentu vizualizāciju, paredzot datiem par katru fragmentu savu rindiņu. Pēc pēdējās rindiņas jāievada vēl šādas formas rindiņa:

1-5
99999

99999 – pazīme, pēc kuras notiek izeja no utilitprogrammas un pāreja uz nākošās norādītās utilitprogrammas izpildi.

Var atzīmēt, ka utilitprogrammas 3 papilddatu rindiņa var būt arī tukša rindiņa, kas nozīmē to, ka visi vizualizācijas parametri ievadīti ar noklusējumu. Tad tiek veikta visa režģa vizualizācija, kas būtībā atbilst  $IFV = 0$ .

Utilitprogrammas 4 papilddati. Ar ārējās iedarbes faktoriem šeit saprot informāciju par robežnosacījumiem un magnētiskā lauka avotiem, piesaistot tos topoloģiskā modeļa bāzes elementiem (bāzes apakšapgabaliem, bāzes līnijām, bāzes mezgliem). Izpildot utilitprogrammu 4, tiek sagatavota informācija programmai TRISERV par to, kādas uzdevuma nosacījumiem atbilstošās fizikālo lielumu skaitliskās vērtības attiecināmas uz ģenerētā režģa elementiem (mezgliem un trīsstūriem).

Utilitprogrammas 4 papilddati sastāv no 5 blokiem, kuriem ir fiksēta secība un vienāda struktūra. Šie bloki numerācijas secībā satur informāciju par šādiem ārējās iedarbes faktoriem:

- 1) pirmā veida robežnosacījumiem;
- 2) otrā veida robežnosacījumiem;
- 3) trešā veida robežnosacījumiem;
- 4) izkliedētiem magnētiskā lauka avotiem;
- 5) punktveida magnētiskā lauka avotiem.

Utilitprogrammas 4 papilddatu un to atsevišķo bloku struktūra ir šāda:

1-5	6-10	
<i>IROB1</i>	<i>NROB1</i>	1) Pirmā veida robežnosacījumi
<i>NBL1</i>	<i>NK</i>	
<i>NBL2</i>	<i>NK</i>	
...	...	
99999		
<i>IROB2</i>	<i>NROB2</i>	2) Otrā veida robežnosacījumi
<i>NBL1</i>	<i>NK</i>	
<i>NBL2</i>	<i>NK</i>	
...	...	
99999		
<i>IROB3</i>	<i>NROB3</i>	3) Trešā veida robežnosacījumi
<i>NBL1</i>	<i>NK</i>	
<i>NBL2</i>	<i>NK</i>	
...	...	
99999		
<i>IAMI</i>	<i>NAVI</i>	4) Izkliedēti lauka avoti
<i>NBA1</i>	<i>NK</i>	
<i>NBA2</i>	<i>NK</i>	
...	...	
99999		

<i>I</i> AVP	<i>N</i> AVP	5) Punktveida lauka avoti
<i>NBP</i> 1	<i>NK</i>	
<i>NBP</i> 2	<i>NK</i>	
...	...	
99999		

*I*ROB1, *I*ROB2, *I*ROB3, *I*AVI, *I*AVP = *II* – katra bloka pirmās rindiņas 1. –5. pozīcijās ierakstāmā pazīme, kas nosaka šī iedarbes faktora esību vai neesību:

$$II = [0]//1.$$

Ja aplūkojamais ārējās iedarbes faktors dotajā uzdevumā pastāv,  $II = 1$ , pretējā gadījumā  $II = 0$ , turklāt pēdējā gadījumā pārējie bloka ievadlauki nav jāaizpilda.

*N*ROB1, *N*ROB2, *N*ROB3, *N*AVI, *N*AVP = *NN* – doto iedarbes faktoru raksturojošā fizikālā lieluma dažādo skaitlisko vērtību skaits.

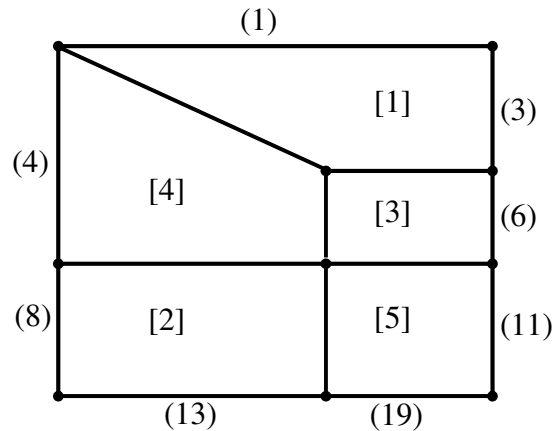
*NBL*1, *NBL*2, ... – to bāzes līniju numuri, uz kurām paredzēts uzdot pirmā, otrā vai trešā veida robežnosacījumus.

*NBA*1, *NBA*2, ... – to bāzes apakšapgabalu numuri, kuros ir izkļiedēti magnētiskā lauka avoti.

*NBP*1, *NBP*2, ... – to bāzes mezglu numuri, kuros ir punktveida magnētiskā lauka avoti.

*NK* – viena no parametra *NN* vērtībām (parametra *NN* skaitliskās vērtības identifikācijas numurs) atbilstoši uzdevuma nosacījumiem ( $1 \leq NK \leq NN$ ).

Var atzīmēt, ka elektrisko mašīnu magnētiskā lauka aprēķina uzdevumos trešā veida robežnosacījumi un punktveida lauka avoti netiek izmantoti, tāpēc šajos gadījumos  $I$ ROB3 = 0 un  $I$ AVP = 0.



30. zīm.

30. zīmējumā attēlots aprēķina apgabala topoloģiskā modeļa piemērs ar šādiem ārējās iedarbes faktoriem: uz augšējās un kreisās apgabala robežas uzdoti nullvērtības pirmā veida robežnosacījumi, uz apakšējās un labās robežas – nullvērtības otrā veida robežnosacījumi, apakšapgabalos 3 un 5 ir izkļiedēti magnētiskā lauka avoti ar dažādiem strāvu blīvumiem. (Pārskatāmības dēļ zīmējumā nav numurēti bāzes mezgli, bet no bāzes līnijām numurētas tikai tās, kuras atrodas uz apgabala robežām).

Atbilstoši aplūkojamā piemēra nosacījumiem utilītprogrammas 4 papilddati pierakstāmi šādā formā:

1-5	6-10
1	1
1	1
4	1
8	1
99999	
1	1
3	1
6	1
11	1
13	1
19	1
99999	
0	
1	2
3	2
5	1
99999	
0	

### 6.3. Programmas TRIANGA izpilde

Programmas TRIANGA izpildi var veikt pēc tam, kad sagatavots un saglabāts atmiņā tās ievaddatu fails **VRD1 . dat** (sk. 6.2.2. apakšnodaļu). Programmu MS DOS vidē palaiž ar speciālu komandu (šīs komandas vārds atkarībā no programmas TRIANGA versijas var būt atšķirīgs), pēc kuras seko ar tukšumzīmi atdalīts ievaddatu faila vārds **VRD1**. Programmas izpildes rezultātā izveidojas divi faili, kuri tiek ierakstīti atmiņā, ja ievaddatu failā paredzēta utilītprogramma 8. Minētajiem failiem tiek piešķirti identifikatori **VRD1 . lst** un **VRD1 . grd**, turklāt šo failu vārdi atbilst ievaddatu faila vārdam.

Fails **VRD1 . lst** ir programmas darbības protokols, kas izveidots kā teksta fails un satur šādu informāciju: visus ievaddatus; paziņojumus par kļūdām ievaddatos, ja tādas ir konstatētas; paskaidrojumus un komentārus par ģenerēto režģi un tā parametriem, kā arī citu informāciju.

Fails **VRD1 . grd** satur programmas darbības rezultātus – ģenerēto režģi – formātā, kāds paredzēts nolasīšanai programmā TRISERV.

#### 6.4. Programmas TRISERV ievaddati un to sagatavošana

Programmas darbībai nepieciešamā informācija sastāv no divām daļām:

- informācijas par ģenerēto režģi programmas TRIANGA izvaddatu faila **V1 . grd** veidā;
- informācijas par uzdevuma fizikālo parametru skaitliskajām vērtībām un programmas TRISERV režģiem ievaddatu faila veidā ar faila identifikatoru "**V2 . dtp**", kur **V2** – brīvi izvēlēts un MS DOS prasībām atbilstošs faila vārds, **dtp** – obligāts faila vārda paplašinājums.

Programmas TRISERV ievaddatu fails sastāv no virsraksta, kuru noformē tāpat kā programmā TRIANGA un programmas TRISERV utilitprogrammu izsaukumiem, ko realizē tāpat kā programmā TRIANGA (sk. 6.2.3. apakšnodaļu). Biežāk izmantojamo TRISERV utilitprogrammu saraksts dots 6. tabulā.

6. tabula

Utilitprogrammas numurs	Izpildāmās funkcijas	Piezīmes
2	Ģenerētā režģa parametru informācijas tabulu izdruka	Sk. 5. tabulu
3	Ģenerētā režģa vizualizācija	Sk. 5. tabulu
16	Programmas izpildes rezultātu ierakstīšana atmiņā	Utilitprogrammas izpilde nepieciešama tikai tad, ja programmas TRISERV rezultātus paredzēts izmantot kā ievaddatus citās programmās
20	Topoloģiskā modeļa bāzes mezglu koordinātu mērogošana	Utilitprogrammas izpildei nepieciešami papilddati; utilitprogrammas izsaukums nepieciešams tikai tad, ja programmā TRIANGA koordinātas nav uzdotas metros
41	Režģa mezglu vektoriālo potenciālu skaitlisko vērtību izdruka tabulas veidā	
44	Režģa mezglu koordinātu un vektoriālo potenciālu skaitlisko vērtību izdruka tabulas veidā	
51	Magnētiskā lauka ainas vizualizācija	Utilitprogrammas izpildei nepieciešami papilddati; utilitprogrammu izmanto ļoti reti
100	Magnētisko materiālu īpašību raksturošana	Utilitprogrammas izpildei nepieciešami papilddati
101	Vienādojumu sistēmas risināšanas kārtējā iterācija	Utilitprogrammu izpilda vairākas reizes atkarībā no nepieciešamo iterāciju skaita

6. tabulas turpinājums

103	Programmas darbības beigas	Pēdējā izsaukamā utilitprogramma
104	Programmas TRISERV režīmu uzdošana	Utilitprogrammas izpildei nepieciešami papilddati
105	Ārējās iedarbes faktoru skaitlisko vērtību uzdošana	Utilitprogrammas izpildei nepieciešami papilddati
201	Topoloģiskā modeļa bāzes elementu un ģenerētā režģa elementu numerācijas atbilstības tabulu izdruka	Utilitprogramma veic tādas pašas funkcijas kā programmas TRIANGA utilitprogramma 15

Utilitprogrammu izsaušanas secība programmā TRISERV nav stingri noteikta, taču tai jāatbilst programmas darbības loģikai (sk. arī piemēru 6.6. apakšnodaļā). Tā, piemēram, utilitprogrammu 101 var izpildīt tikai pēc tam, kad ievadītas visas tās izpildei nepieciešamo parametru skaitliskās vērtības, t.i., pēc utilitprogrammu 105, 100, 20, 104 izpildes. Utilitprogrammu 105, 100, 20, 201 secība ir patvaļīga, bet šo utilitprogrammu izsaukumiem jābūt ievaddatu faila sākumā. Arī utilitprogrammu 41 (vai 44) un 51 secība ir patvaļīga, tikai to izsaukumi jāparedz pēc 101 utilitprogrammas izsaukuma. Utilitprogrammu 16, 41 (vai 44), 51 izpildi lietderīgi paredzēt pēc pēdējās iterācijas, kad tiek uzskatīts, ka uzdevums ir atrisināts ar vajadzīgo precizitāti. Ja vēlams izsekot iterāciju procesa dinamikai (vektoriālā potenciāla  $A$  izmaiņai atsevišķos režģa mezglos), utilitprogrammas 41 izpildi var paredzēt pēc katras iterācijas.

Utilitprogrammas 20 papilddati. Programmā TRISERV visi aprēķini tiek veikti SI pamatmērvienībās. Tāpēc mērogošanas koeficients nepieciešams, lai programmā TRIANGA jebkurās mērvienībās uzdotās bāzes mezglu koordinātas varetu pārrēķināt SI pamatmērvienībās, t.i., metros.

Utilitprogrammas 20 papilddatus ieraksta vienā rindiņā, kuras forma ir šāda:

1-10
$CM$

$CM$  – mērogošanas koeficients, ar kuru jāpareizina uzdotās bāzes mezglu koordinātas, lai to vērtības iegūtu metros.

Ja, piemēram, bāzes mezglu koordinātas programmā TRIANGA uzdotas centimetros,  $CM = 0,01$ ; ja topoloģiskā modeļa zīmējums izpildīts mērogā, piemēram, 1:2, bet koordinātas no šī zīmējuma nolasītas milimetros,  $CM = 0,002$ ; ja koordinātas uzdotas metros,  $CM = 1,0$  vai arī utilitprogrammas 20 izsaukums vispār nav vajadzīgs.

Utilitprogrammas 51 papilddati. Izpildot šo utilitprogrammu, var iegūt magnētiskā lauka ainu, kurā lauka spēka līnijas attēlotas ar līnijām, ko veido noteiktā secībā izvietoti burtciparu simboli. Var atzīmēt, ka utilitprogrammu 51 izmanto reti, ievērojot to, ka šādi iegūtā lauka aina nav labi pārskatāma, un to, ka ir šajā kompleksā neietilpstošas speciālas programmas, kas ļauj iegūt lauka spēka līniju sadalījumu grafiska attēla veidā.

Utilitprogrammas 51 papilddatus var izvietot neierobežota skaita rindiņās, tādējādi radot iespēju iegūt vizualizāciju aprēķina apgabala dažādās zonās kā atsevišķus fragmentus. Katram fragmentam atbilstošās rindiņas struktūra ir šāda:

1-5	6-10	11-15	16-20	21-30	31-40	41-50	51-60
<i>NEL</i>	0.5	<i>NSCX</i>		<i>[XMIN]</i>	<i>[XMAX]</i>	<i>[YMIN]</i>	<i>[YMAX]</i>

*NEL* – ekvipotenciālo līniju skaits:

$$NEL = [10] // \text{cita uzdotā vērtība.}$$

*NSCX* – vertikālo joslu skaits, kādās tiek sadalīts vizualizācijai paredzētais fragments:

$$NSCX = [1] // \text{cita uzdotā vērtība.}$$

Ja  $NSCX > 1$ , katra no šīm joslām tiek attēlota viena zem otras kā atsevišķa vizualizācija.

*XMIN*, *XMAX*, *YMIN*, *YMAX* – vizualizācijai paredzētā fragmenta robežas; ja šīs robežas netiek uzdotas, tiek veikta visa aprēķina apgabala lauka ainas vizualizācija.

Utilitprogrammas 100 papilddati. Feromagnētisko materiālu nelineāro īpašību raksturošanai izmanto funkcionālu sakarību  $\nu = f(B)$ . Programmā TRISERV šādas funkcionālās sakarības dažādu marķu elektrotehniskajiem tēraudiem tiek aproksimētas ar trešās pakāpes polinomiāliem splineiem, kuru koeficientu masīvi iekļauti tieši programmā.

Informācijā par bāzes apakšapgabaliem (sk. 6.2.1. apakšnodaļas 2. punktu un 6.2.2. apakšnodaļas 7. punktu) katra bāzes apakšapgabala materiālam tika piešķirts nosacīts apzīmējums *NUMM* ( $1 \leq NUMM \leq NMAT$ , kur *NMAT* – kopējais dažādo materiālu skaits aprēķina apgabalā). Utilitprogrammā 100 katrai *NUMM* vērtībai jāaizpilda viena rindiņa, šīs rindiņas izvietojot vienu zem otras parametra *NUMM* pieaugošā secībā. Kopējais rindiņu skaits tad būs *NMAT*, bet katras rindiņas struktūra šāda:

1-10	11-15
<i>ANI</i>	<i>NNIB</i>

*ANI* – materiāla īpatnējā magnētiskā pretestība (sk. izteiksmi (137)).

Materiāliem ar lineārām magnētiskajām raksturlīknēm (gaiss, tinumu materiāli)

$ANI = 1/\mu_0 = 796000 \text{ m/H}$ . Feromagnētiskajiem materiāliem parametrs *ANI* nozīmē  $\nu$  pirmo tuvinājumu, kura skaitlisko vērtību var pieņemt patvaļīgi (ieteicams robežās  $200 \div 600 \text{ m/H}$ ).

*NNIB* – funkcionālās sakarības  $\nu = f(B)$  identifikators dažādu marķu feromagnētiskiem materiāliem saskaņā ar 7. tabulu.

7. tabula

Materiāla tips	Parametrs <i>NNIB</i>
Nemagnētiski materiāli ar lineāru magnētisko raksturlīkni	0
Elektrotehniskais lokšņu tērauds ( marka 1211, 1212, 1311)	1
Lokšņu tērauds (marka 3)	2
Lietais tērauds (marka 3)	3
Elektrotehniskais lokšņu tērauds ( marka 1411, 1412, 1413)	4
Elektrotehniskais lokšņu tērauds ( marka 1511, 1512, 1513)	5
Elektrotehniskais lokšņu tērauds ( marka 2211, 2312)	6



Utilītprogrammas 104 papilddati. Iepriekš iztirzātajos elektrisko mašīnu magnētiskā lauka uzdevumos nepieciešams izmantot divus no iespējamiem programmas TRISERV režīmiem. Katra režīma uzdošanai jāparedz atsevišķs utilītprogrammas 104 izsaukums, pēc kura seko šādas formas papilddatu rindiņa:

1-5
IREG

IREG – uzdodamā režīma identifikators:

$$IREG = 20; 23.$$

Režīma identifikators  $IREG = 20$  nozīmē, ka risināšanai paredzēta plakanparalēlam laukam atbilstoša vienādojumu sistēma attiecībā pret vektoriālo magnētisko potenciālu. Šis režīms elektrisko mašīnu magnētiskā lauka aprēķina uzdevumos jāparedz obligāti. Ja uzdots režīms  $IREG = 23$ , programmas TRISERV izvaddatu failā pēc katras iterācijas tiek izvadīta informācija par iterāciju procesu raksturojošiem parametriem. Šī režīma uzdošana var būt nepieciešama, lai kontrolētu un novērtētu vajadzīgo iterāciju skaitu.

Utilītprogrammas 105 papilddati. Tā kā elektrisko mašīnu magnētiskā lauka aprēķina uzdevumos netiek uzdoti trešā veida robežnosacījumi un nav punktveida lauka avotu, tad utilītprogrammas 105 papilddati var saturēt tikai informāciju par pirmā un otrā veida robežnosacījumiem un izklaidētiem lauka avotiem. Šo trīs ārējās iedarbes faktoru esību nosaka parametrs  $II$  ( $IROB1$ ,  $IROB2$ ,  $IAMI$ ), bet to dažādo skaitlisko vērtību skaitu – parametrs  $NN$  ( $NROB1$ ,  $NROB2$ ,  $NAVI$ ) atbilstoši programmas TRIANGA utilītprogrammas 4 papilddatos uzdotajām vērtībām (sk.6.2.2).

Pēc utilītprogrammas 105 izsaukuma nākošā rindiņa jāaizpilda šādi:

1-5
2

2 – obligāts parametrs.

Pēc tam seko rindiņa ar pirmā veida robežnosacījumu skaitliskajām vērtībām (ja uzdevumā šādi robežnosacījumi ir, t.i., ja  $IROB1 \neq 0$ ):

1-10	11-20	21-30	31-40	41-50
V11	V12	V13	...	...

$V11$ ,  $V12$ ,  $V13$ , ... – vektoriālā potenciāla skaitliskās vērtības ( $Wb/m$ ), kuru skaits ir vienāds ar  $NROB1$ , to identifikācijas numuru  $NK$  pieaugošā secībā (sk. programmas TRIANGA utilītprogrammas 4 papilddatos).

Tālāk seko rindiņa ar otrā veida robežnosacījumu skaitliskajām vērtībām (ja uzdevumā šādi robežnosacījumi ir, t.i., ja  $IROB2 \neq 0$ ):

1-10	11-20	21-30	31-40	41-50
V21	V22	V23	...	...

$V21$ ,  $V22$ ,  $V23$ , ... – vektoriālā potenciāla atvasinājuma skaitliskās vērtības ( $Wb/m^2$ ), kuru skaits ir vienāds ar  $NROB2$ , to identifikācijas numuru  $NK$  pieaugošā secībā (sk. programmas TRIANGA utilītprogrammas 4 papilddatos).

Papilddatu pēdējā rindiņā ieraksta lauka avota raksturojošā parametra – strāvas blīvuma skaitliskās vērtības (ja uzdevumā šādi avoti ir, t.i., ja  $IAVI \neq 0$ ):

1-10	11-20	21-30	31-40	41-50
$VI1$	$VI2$	$VI3$	...	...

$VI1, VI2, VI3, \dots$  – strāvas blīvuma skaitliskās vērtības ( $A/m^2$ ), kuru skaits ir vienāds ar  $NAVI$ , to identifikācijas numuru  $NK$  pieaugošā secībā (sk. programmas TRIANGA utilitprogrammas 4 papilddatus). Avota strāvas blīvuma skaitliskās vērtības aprēķina ar formulu

$$j_a = \frac{ni_a}{S_a}, \quad (149)$$

kur  $n$  – apakšapgabalā izvietotās tinuma vai tinuma daļas vadu skaits;  $i_a$  – avota strāva;  $S_a$  – aplūkojamā apakšapgabala laukums.

Ja kāds no parametriem  $NROB1, NROB2$  vai  $NAVI$  ir lielāks par 5, šo ārējās iedarbes faktoru skaitliskās vērtību ieraksta vairākās rindiņās kā iepriekšējo rindiņu turpinājumus identifikācijas numuru  $NK$  pieaugošā secībā.

## 6.5. Programmas TRISERV izpilde

Programmas TRISERV izpildi var veikt pēc tam, kad atmiņā saglabāts programmas TRIANGA izvaddatu fails **V1 .grd**, kā arī sagatavots un saglabāts atmiņā programmas TRISERV ievaddatu fails **V2 .dtp**. Programmu TRISERV MS DOS vidē palaiž ar speciālu komandu (šīs komandas vārds atkarībā no programmas TRISERV versijas var būt atšķirīgs), pēc kuras seko ar tukšumzīmēm atdalīti un šādā secībā ievadīti failu vārdi: **V2\_ V1\_ V3\_ V4**. Šeit **V2** ir programmas TRISERV ievaddatu faila **V2 . dtp** vārds, **V1** – programmas TRIANGA izvaddatu faila **V1 . grd** vārds.

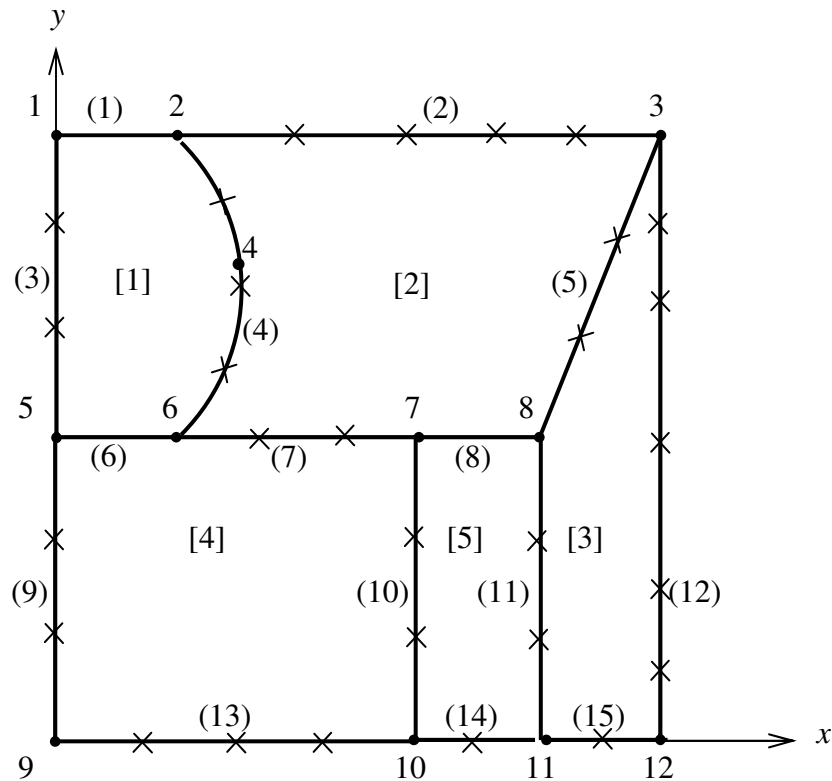
Programmas TRISERV izpildes rezultātā izveidojas un tiek ierakstīti atmiņā divi faili. Minētajiem failiem ir piešķirti identifikatori “**V3 . res**” un “**V4 . lst**”, turklāt šo failu vārdi ir programmas palaišanas komandā brīvi izvēlēti un MS DOS prasībām atbilstoši failu vārdi.

Fails **V3 . res** satur programmas izpildes rezultātus programmas TRISERV fiksētā formātā. Šo failu var izmantot aprēķina rezultātu apstrādei ar citām šajā kompleksā neietilpstošām programmām. Fails **V4 . lst** ir programmas TRISERV darbības protokols, kas izveidots kā teksta fails un satur: visus ievadītos datus; paziņojumus par kļūdām, ja tādas ir konstatētas; paskaidrojumus un komentārus par programmas darbību; visas utilitprogrammu izsaukumos paredzētās informācijas izdruku.

## 6.6. Programmu TRIANGA un TRISERV ievaddatu piemērs

### 6.6.1. Uzdevuma nosacījumi un topoloģiskā modeļa parametri

31. zīmējumā attēlots topoloģiskais modelis aprēķina apgabalam, kura izmēri ir  $5,0 \times 5,0$  cm.



31. zīm.

Uzdevuma nosacījumi pieņemti šādi. Uz augšējās un labās apgabala robežas uzdoti nullvērtības pirmā veida robežnosacījumi ( $A = 0$ ), bet uz apakšējās un kreisās robežas – nullvērtības otrā veida robežnosacījumi ( $\partial A / \partial n = 0$ ). Apakšapgabalos 4 un 5 ir izklaidēti magnētiskā lauka avoti ar strāvas blīvumiem attiecīgi  $j_{a4} = 2000000 \text{ A/m}^2$ ,  $j_{a5} = 5500000 \text{ A/m}^2$ . Apakšapgabala 1 vide ir gaiss, bet apakšapgabalu 2 un 3 vide feromagnētisks materiāls – elektrotehniskais lokšņu tērauds 1211.

### 6.6.2. Programmas TRIANGA ievaddatu faila piemērs

8. tabulā dots uzdevuma nosacījumiem atbilstošs programmas TRIANGA ievaddatu faila piemērs. Tabulā atsevišķi ievaddatu bloki atdalīti ar pārtrauktām horizontālām līnijām un tabulas pirmajā kolonnā norādīti rindiņu numuri (ši kolonna uz ievaddatiem neattiecas).

8. tabula

1)	1		2		3		4		5		
2)	12345	67890	12345	67890	12345	67890	12345	67890	12345	67890	12345
3)			Programmas TRI		ANGA		ievad datu fails				
4)					*****						
5)	0	0	0			1.29					
6)	12	15	5								
7)	0.0	5.0	1.0	5.0	5.0	5.0	1.75	3.75	0.0	2.5	
8)	1.0	2.5	3.0	2.5	4.0	2.5	0.0	0.0	3.0	0.0	
9)	4.0	0.0	5.0	0.0							
10)	1	1	2								
11)	2	2	3		2	4	1.5				
12)	3	1	5		0	2					
13)	4	2	4	6	0	3					
14)	5	8	3		0	2					
15)	6	5	6								
16)	7	6	7		0	2					
17)	8	7	8								
18)	9	5	9		0	2					
19)	10	7	10		0	2					
20)	11	8	11		0	2					
21)	12	3	12		4	5	2.0				
22)	13	9	10		0	3					
23)	14	10	11		0	1					
24)	15	11	12		0	1					
25)	1	1									
26)	3	6	4	1							
27)	2	2									
28)	2	4	7	8	5						
29)	3	2									
30)	11	15	12	5							
31)	4	1									
32)	9	13	10	7	6						
33)	5	1									
34)	8	10	14	11							
35)	4										
36)	1	1									
37)	1	1									
38)	2	1									
39)	12	1									
40)	99999										
41)	1	1									
42)	3	1									
43)	9	1									
44)	13	1									
45)	14	1									
46)	15	1									
47)	99999										
48)	0										
49)	1	2									
50)	4	2									
51)	5	1									
52)	99999										

## 8. tabulas turpinājums

53)	0									
54)	8									
55)	15									
56)	0									

### 6.6.3. Programmas TRSERV ievaddatu faila piemērs

9. tabulā dots uzdevuma nosacījumiem atbilstošs programmas TRISERV ievaddatu faila piemērs. Tabulā atsevišķi utilitprogrammu izsaukumi atdalīti ar pārtrauktām horizontālām līnijām un tabulas pirmajā kolonnā norādīti rindiņu numuri (šī kolonna uz ievaddatiem neattiecas).

9. tabula

1)	1	2	3	4	5
2)	12345 67890	12345 67890	12345 67890	12345 67890	12345 67890
3)	Programma s TRISERV ievaddatu fails				
4)	*****				
5)	105				
6)	2				
7)	0.0				
8)	0.0				
9)	2000 000.0	5500 000.0			
10)	100				
11)	796 000.0	0			
12)	400.0	1			
13)	20				
14)	0.01				
15)	104				
16)	20				
17)	104				
18)	23				
19)	101				
20)	101				
21)	101				
22)	101				
23)	101				
24)	16				
25)	41				
26)	51				
27)					
28)	103				

## Literatūra

1. A. Zviedris. Datorrealizācijas matemātiskās metodes. Lekciju konspekts. R.:RTU, 1999.
2. M. Buiķis, B. Siliņa. Matemātika. Definīcijas, formulas, aprēķinu algoritmi. R.: “Zvaigzne ABC”, 1997.
3. Elektrotehnikas teorētiskie pamati. Stacionāri procesi lineārās ķēdēs. / K. Tabaka redakcijā. R.: “Zvaigzne”, 1985.
4. Elektrotehnikas teorētiskie pamati. Elektromagnētiskais lauks. / K. Tabaka redakcijā. R.: “Zvaigzne”, 1991.
5. A. Zviedris. Elektriskās mašīnas. R.: “Zvaigzne”, 1984.
6. Звиедрис А. П. Электромагнитные расчеты в электрических машинах. Рига, РПИ, 1973.
7. QuickField. Finite Element Analysis System. Version 5.1. User's Guide. Denmark: Tera Analysis, 2003.
8. ELCUT. Моделирование двумерных полей методом конечных элементов. Версия 5.1. Руководство пользователя. Санкт-Петербург, ТОР, 2003.

# Saturs

1. Elektrisko mašīnu magnētisko lauku un tā aprēķina metožu vispārīgs raksturojums . . . . .	3
2. Elektromagnētiskā lauka vienādojumi (Maksvela vienādojumi) . . . . .	5
2.1. Elektromagnētiskā lauka vienādojumu vispārīgā forma . . . . .	5
2.2. Plakanparalēla elektromagnētiskā lauka vienādojumi. . . . .	8
2.3. Vektoriālais magnētiskais potenciāls . . . . .	9
2.4. Elektromagnētiskā lauka raksturlielumu noteikšana ar vektoriālo magnētisko potenciālu . . . . .	13
3. Robežnosacījumi . . . . .	15
3.1. Vispārīgi jēdzieni . . . . .	15
3.2. Robežnosacījumu realizācijas īpatnības elektrisko mašīnu magnētiskā lauka aprēķina uzdevumos . . . . .	20
3.3. Robežnosacījumu speciāli gadījumi un aprēķina apgabala izvēle . . . . .	25
4. Magnētiskā lauka aprēķina analītiskās metodes . . . . .	31
5. Magnētiskā lauka aprēķina skaitliskās metodes. . . . .	34
5.1. Galīgo diferencu metode . . . . .	34
5.2. Galīgo elementu metode. . . . .	41
6. Magnētiskā lauka aprēķina datorprogrammu komplekss un tā praktiskā izmantošana . . . . .	48
6.1. Programmu kompleksa struktūra un pamatfunkcijas . . . . .	49
6.2. Programmas TRIANGA ievaddati un to sagatavošana . . . . .	49
6.2.1. Aprēķina apgabala topoloģiskā modeļa konstruēšana un tā parametru noteikšana . . . . .	49
6.2.2. Programmas TRIANGA ievaddatu faila sagatavošana . . . . .	52
6.3. Programmas TRIANGA izpilde . . . . .	61
6.4. Programmas TRISERV ievaddati un to sagatavošana . . . . .	62
6.5. Programmas TRISERV izpilde . . . . .	66
6.6. Programmas TRIANGA un TRISERV ievaddatu piemērs . . . . .	67
6.6.1. Uzdevuma nosacījumi un topoloģiskā modeļa parametri . . . . .	67
6.6.2. Programmas TRIANGA ievaddatu faila piemērs . . . . .	67
6.6.2. Programmas TRISERV ievaddatu faila piemērs . . . . .	69
Literatūra . . . . .	70