RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE

A. Zviedris

Datorrealizācijas matemātiskās metodes

Lekciju konspekts

Pārstrādāts un papildināts izdevums

Rīgas Tehniskā universitāte
Rīga 2004

UDK 518(075.8)

Zinātniskais redaktors Dr. sc. ing. K.Ketners

Izdots saskaņā ar Enerģētikas institūta Padomes lēmumu, protokols Nr.09(43) 13.01.2004.

1. Lineāru vienādojumu sistēmu risināšanas metodes

1.1. Vispārīgi jēdzieni

Vispārīgā veidā n lineāru vienādojumu sistēmu ar n nezināmajiem var uzrakstīt šādā formā:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{aligned} \tag{1}$$

Vienādojumi šajā sistēmā skaitās numurēti: 1, 2,…, i,…, n. Lielumi x_1, x_2,…, x_j,…, x_n ir sistēmas nezināmie, a_{11}, a_{12},…, a_{ij},…, a_{nn} – sistēmas koeficienti, b_1, b_2,…, b_i,…, b_n – sistēmas brīvie locekļi. Koeficientu pie nezināmā x_j i-jā vienādojumā apzīmē ar a_{ij}, kur pirmais indekss i norāda vienādojuma numuru, bet otrais indekss j – nezināmā numuru.

Īsākā formā sistēmu (1) var uzrakstīt šādi:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i=1,2,\ldots,\mathrm{n}).$$

Par vienādojumu sistēmas atrisinājumu sauc skaitļu kopu, kuri, ievietoti vienādojumos x_1, x_2,…, x_j,…, x_n vietā, pārvērš šos vienādojumus par identitātēm.

Divas vai vairākas vienādojumu sistēmas sauc par ekvivalentām, ja tām ir vienādi atrisinājumi. Jebkuru vienādojumu sistēmu var pārveidot ekvivalentā sistēmā, izmantojot šādas operācijas:

1) samainot vietām divus vai vairākus vienādojumus;
2) pareizinot jebkura vienādojuma abas puses ar jebkuru skaitli, kurš nav nulle;
3) pieskaitot kāda vienādojuma abām pusēm attiecīgi cita vienādojuma abas puses.

Vienādojumu sistēmu (1) var uzrakstīt matricu formā:

$$AX = B, \tag{2}$$

kur

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Kvadrātisko matricu A sauc par sistēmas (1) matricu, kolonnas matricu X – par nezināmo matricu, kolonnas matricu B – par brīvo locekļu matricu.

1.2. Vienādojumu sistēmas risināšana ar matricu metodi

Pareizinot vienādojuma (2) abas puses ar inverso marticu A^{-1}, iegūstam

$$A^{-1}AX = A^{-1}B. \tag{3}$$

No matricu teorijas ir zināms, ka

$$A^{-1}A = E,$$

kur E – vienības matrica, t.i., diagonāla matrica, kurā visi elementi uz galvenās diagonāles ir vienādi ar 1, bet pārējie elementi vienādi ar 0.

Tad izteiksmes (3) vietā iegūstam:

$$X = A^{-1}B. \tag{4}$$

Tādējādi, lai atrisinātu matricu vienādojumu (3), jāatrod inversā matrica A^{-1} un pēc tam tā jāpareizina ar matricu B.

Inverso matricu atrod, izdarot šādas darbības:

1) atrod matricas A determinantu $|A|$;

2) atrod matricas A elementu algebriskos papildinājumus

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \tag{5}$$

kur M_{ij} – matricas A minors, kuru iegūst, ja izsvītro matricas i-to rindiņu un j-to kolonnu;

3) no algebriskajiem papildinājumiem sastāda jaunu matricu

$$A' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}; \tag{6}$$

4) apmainot vietām matricas A' rindiņas un kolonnas, iegūst transponēto matricu

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}; \tag{7}$$

5)atrod inverso matricu

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|}. \tag{8}$$

Iepriekš aplūkotās operācijas var realizēt ar standartprogrammām (piem., EXCEL – ar komandām MINVERSE, MMULT).

1.3. Vienādojumu sistēmas risināšana ar iterāciju (atkārtoto tuvinājumu) metodi

Iterāciju metode ir tuvināta metode, kuru izmantojot, vienādojumu sistēmas saknes iegūst ar uzdoto precizitāti kā šo sakņu virknes robežu.

Pieņemot, ka sistēmas (1) diagonālie koeficienti $a_{ii} \neq 0$, izteiksim no pirmā vienādojuma x_1, no otrā vienādojuma x_2 utt. Tad iegūsim šādu sistēmu:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n , \\
x_2 &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3 - \ldots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{1n}}{a_{nn}} x_1 - \frac{a_{2n}}{a_{nn}} x_2 - \cdots - \frac{a_{n-1,n}}{a_{nn}} x_{n-1} .
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Apzīmēsim

$$\frac{b_i}{a_{ii}} = \beta_i , \; -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} = \alpha_{ij} ,$$

kur i=1,2,…, n; j=1,2,…, n, turklāt α_{ii}=0.

Tad sistēmu (9) var uzrakstīt šādā formā:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \beta_1 + \alpha_{11} x_2 + \alpha_{13} x_3 + \ldots + \alpha_{1n} x_n , \\
x_2 &= \beta_2 + \alpha_{21} x_1 + \alpha_{23} x_3 + \ldots + \alpha_{2n} x_n , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= \beta_n + \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \ldots + \alpha_{n-1,n} x_n .
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Apzīmēsim

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}, \; \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

un uzrakstīsim sistēmu (10) matricu formā:

$$X = \beta + \alpha X \; . \tag{11}$$

Matricu vienādojumu (11) var risināt ar iterāciju metodi. Par sākuma tuvinājumu (0-to tuvinājumu) pieņemsim brīvo locekļu kolonnas matricu:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \ldots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

jeb matricu formā

$$X^{(0)} = \beta \, .$$

Pirmo tuvinājumu atrodam kā

$$X^{(1)} = \beta + \alpha X^{(0)},$$

otro tuvinājumu – kā

$$X^{(2)} = \beta + \alpha X^{(1)} \text{ utt.}$$

Jebkuru (k+1) tuvinājumu aprēķina pēc formulas

$$X^{(k+1)} = \beta + \alpha X^{(k)} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{12}$$

Ja tuvinājumu virknei $X^{(0)}$, $X^{(1)}$,…, $X^{(m)}$ eksistē robeža

$$X = \lim_{k\to\infty} X^{(k)},$$

tad šī robeža ir sistēmas atrisinājums.

Iterāciju skaits, risinot vienādojumu sistēmu, ir atkarīgs no uzdotās pieļaujamās kļūdas Δ. Iterāciju procesu beidz, kad jebkura nezināmā x_j vērtība apmierina nosacījumu

$$\left| x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)} \right| \le \Delta. \tag{13}$$

1.4. Iterāciju procesa konverģences nosacījumi un vienādojumu sistēmas pārveidošana iterāciju metodei piemērojamā formā

Iterāciju process konverģē, ja sakņu virknei, kas iegūta secīgās iterācijās, eksistē robeža. Konverģence ir atkarīga no matricas α elementu vērtībām: ja matricas α jebkuras rindiņas vai kolonnas elementu moduļu summa ir mazāka par 1, tad iterāciju processs konverģē, pretējā gadījumā – diverģē.

Matemātiskā formā konverģences nosacījumus var uzrakstīt šādi:

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \alpha_{ij} \right| < 1 \quad (i=1,2,\ldots,\ n),\ \text{vai} \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \alpha_{ij} \right| < 1 \quad (\mathrm{j}=1,2,\ldots,\ \mathrm{n}), \tag{15}$$

kur i – rindiņas numurs; j – kolonnas numurs.

Konverģences nosacījumu var attiecināt arī uz matricas A elementiem (sk. 1.1.). Šajā gadījumā jāizpildās nosacījumam

$$\left| a_{ii} \right| > \sum_{j\ne i} \left| a_{ij} \right|, \tag{16}$$

t.i., matricas A jebkuras rindiņas diagonālā koeficienta modulim ir jābūt lielākam par pārējo šīs rindiņas koeficientu moduļu summu.

Ja dotajai vienādojumu sistēmai konverģences nosacījumi neizpildās, tad, lai varētu izmantot iterāciju metodi, vienādojumu sistēma ir jāpārveido tādā ekvivalentā sistēmā, kurai nosacījumi (14), (15) vai (16) izpildās. Šajā gadījumā izmanto iepriekš (sk. 1.1.) minētos ekvivalentos pārveidojumus.

2. Nelineāru vienādojumu risināšanas metodes

2.1. Vispārīgi norādījumi

Jebkuru vienādojumu ar vienu nezināmo var uzrakstīt šādā formā:

$$\varphi(x) = u(x), \tag{17}$$

kur $\varphi(x)$ un $u(x)$ - zināmas mainīgā x funkcijas, kas definētas kaut kādā apgabalā, ko sauc par funkcijas definīcijas apgabalu.

Vienādojumu var uzrakstīt arī citādā formā:

$$f(x) = 0, \tag{18}$$

ko dabū no (17), t.i.,

$$f(x) = \varphi(x) - u(x) = 0.$$

Abas pieraksta formas ir ekvivalentas un to izmantošana atkarīga no vienādojuma risināšanā izmantojamās metodes.

Atkarībā no tā, kādas funkcijas satur vienādojumi (17) vai (18), izšķir algebriskos un transcendentos vienādojumus. Vienādojumu sauc par algebrisku, ja šis vienādojums satur funkcijas, kuru aprēķināšanai jāizdara tikai tādas aritmētiskas operācijas kā saskaitīšana, atņemšana, reizināšana, dalīšana, vai arī kāpināšana pakāpē n vai $1/n$, kur n – vesels skaitlis. Transcendentie vienādojumi ir visi pārējie vienādojumi, kuri satur “nealgebriskas funkcijas”, piem., eksponentfunkciju, logaritmisko funkciju, trigonometriskās funkcijas, apgrieztās trigonometriskās funkcijas u.tml. Nelineārie vienādojumi ir visi transcendentie vienādojumi, kā arī tie algebriskie vienādojumi, kuri satur locekļus x^n, ja $n \neq 1$.

Atrisināt vienādojumu nozīmē atrast tā saknes, kuras, ievietotas vienādojumā pārvērš to par identitāti.

Jāatzīmē, ka pat algebrisko vienādojumu precīza sakņu vērtību atrašana ir iespējama tikai samērā retos gadījumos (ja vienādojumi satur tikai locekļus ar x^2, x^3 un x^4). Pārējos gadījumos jāizmanto tuvināta risināšana, kad vienādojuma sakni atrod ar kaut kādu iepriekšuzdotu kļūdu Δ, kas raksturo risināšanas precizitāti.

Pieņemsim, ka r ir vienādojuma saknes precīzā vērtība, bet $\tilde{x}$ šīs saknes tuvināta vērtība. Tas nozīmē, ka

$$|r - \tilde{x}| \leq \Delta.$$

Ja konstatēts, ka vienādojuma sakne atrodas intervālā $[a;b]$, t.i., $a < r < b$, turklāt, $|b-a| \leq \Delta$, tad skaitļi a un b ir saknes tuvinātas vērtības attiecīgi ar iztrūkumu un uzviju. Tādējādi par saknes tuvināto vērtību ar precizitāti Δ var pieņemt jebkuru skaitli intervālā $[a;b]$. Šajā gadījumā risinājumu pieraksta šādi:

$$r = \tilde{x} \pm \Delta.$$

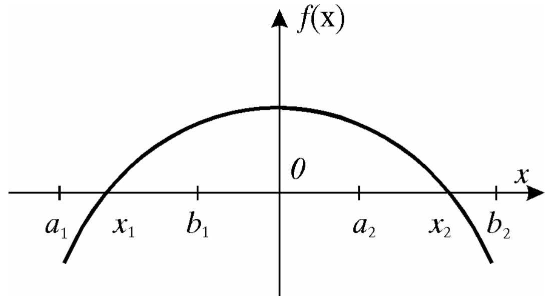
Nelineāra vienādojuma atrisinājumu var sadalīt divos etapos:

1) sakņu atdalīšana;
2) sakņu vērtību precizēšana, ievērojot pieļaujamo kļūdu Δ.

Vienādojuma $f(x) = 0$ sakne skaitās atdalīta intervālā $[a;b]$, ja šajā intervālā vienādojumam nav citas saknes.

Atdalīt saknes nozīmē sadalīt visu funkcijas definīcijas apgabalu apakšintervālos, no kuriem katrs satur tikai vienu saknes vērtību. Saknes var atdalīt ar grafisko vai analītisko metodi.

Izmantojot grafisko metodi, konstruē funkcijas $y = f(x)$ grafiku. Grafika krustpunkti ar Ox asi dod sakņu vērtības un no grafika viegli noteikt punktus a un b, starp kuriem atrodas sakņu vērtības. Piem., 1. zīm. sakne x_1 atrodas intervālā $[a_1;b_1]$, bet sakne x_2 – intervālā $[a_2;b_2]$.



1. zīm.

Analītiski saknes var atdalīt, izmantojot dažas funkciju īpašības, kas pazīstamas no matemātiskās analīzes.

Izmantojot datortehniku nelineāru vienādojumu risināšanā, priekšroka ir dodama grafiskajai metodei, piem., funkcijas grafika konstruēšana ar EXCEL programmu.

Otro etapu – sakņu vērtību precizēšanu – var veikt ar dažādām metodēm. Praksē visvairāk lieto bisekciju, hordu, Ņūtona un iterāciju metodi.

2.2. Bisekciju metode

Pieņemsim, ka dots vienādojums

$$f(x) = 0$$

un kāda no saknēm atdalīta intervālā $[a;b]$. Jāatrod šī vienādojuma sakne ar precizitāti Δ.

Ja intervāls $[a;b]$ izvēlēts tāds, ka $|b-a| \le \Delta$, tad dotā precizitāte ir sasniegta un vienādojums ir atrisināts. Ja $|b-a| > \Delta$, tad sākotnējais intervāls ir jāsašaurina, t.i., jāatrod jauns intervāls $[a_1;b_1]$, turklāt jābūt $a_1 < r < b_1$ un $b_1 - a_1 < b - a$. Ja $|b_1 - a_1| \le \Delta$, vienādojums ir atrisināts, bet ja šis nosacījums neizpildās, intervāls $[a_1;b_1]$ ir jāsašaurina un jāizvēlas kaut kāds intervāls $[a_2;b_2]$, turklāt jābūt $a_2 < r < b_2$ un $b_2 - a_2 < b_1 - a_1$, utt., kamēr iegūstam intervālu $[a_n;b_n]$, kuram

$$|b_n - a_n| \le \Delta. \tag{19}$$

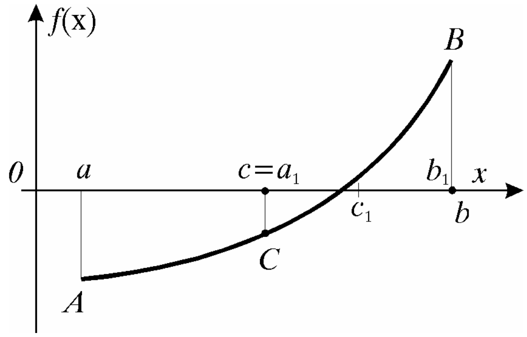
Precizējot saknes vērtību, kārtējo intervāla samazināšanu var izdarīt jebkurā attiecībā α_i, kur

$$\alpha_i = \frac{b_{i+1} - a_{i+1}}{b_i - a_i}.$$

Izmantojot vienādojuma risināšanai datortehniku, lietderīgi intervālu katru reizi dalīt uz pusēm, t.i., pieņemt α_i = 1/2. Šajā gadījumā saknes precizēšanas metodi sauc par bisekciju metodi.

Ja saknes atdalītas intervālā $[a;b]$, tas nozīmē, ka (sk. 2. zīm.) nogriežņa ab galapunktos A un B funkcijai $f(x)$ ir dažādas zīmes, t.i.,

$$f(a) \cdot f(b) < 0. \tag{20}$$



2. zīm.

Saskaņā ar bisekciju metodi uz nogriežņa ab izvēlas punktu c, pie kam $c=(a+b)/2$. Šis punkts intervālu $[a;b]$ sadala divos intervālos – $[a;c]$ un $[c;b]$ ar garumu $(b-a)/2$. Pēc tam no šiem nogriežņiem izvēlas to, kura galos funkcijas $f(x)$ vērtībai ir dažādas zīmes. Ja izpildās nosacījums $f(a)\cdot f(c)<0$, tad jaunajam intervālam būs $a_1=a$ un $b_1=c$, bet ja šis nosacījums neizpildās, tad $a_1=c$ un $b_1=b$. Pēc tam intervālu $[a_1;b_1]$ atkal dala uz pusēm, iegūstot punktu $c_1=(a_1+b_1)/2$ un intervālus $[a_1;c_1]$ un $[c_1;b_1]$ ar garumu $(b_1-a_1)/2$ = $(b-a)/2^2$. Šādas cikliskas operācijas veic tik ilgi, kamēr izpildās nosacījums (19), jeb

$$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\le\Delta. \tag{21}$$

Atrisinot nevienādību (21), var iegūt nepieciešamo tuvinājumu skaitu, kas dod vienādojuma atrisinājumu ar uzdoto precizāti Δ:

$$n=\frac{\ln\frac{b-a}{\Delta}}{\ln 2}.$$

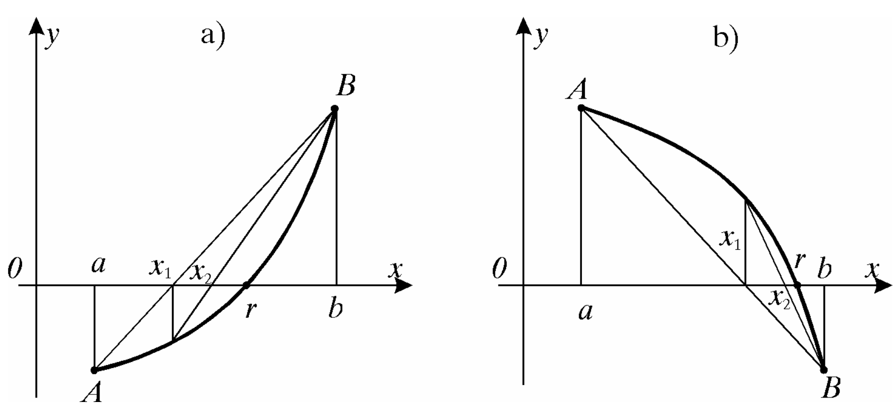
2.3. Hordu metode (proporcionālo dalījumu metode)

Pieņemsim, ka dots vienādojums

$$f(x)=0$$

un kāda no saknēm atdalīta intervālā $[a;b]$, t.i., $f(a)\cdot f(b)<0$.

Hordu metode pamatojas uz to, ka pietiekami mazā intervālā $[a;b]$ līknes $y=f(x)$ loku aizstāj ar hordu, kas savieno punktus A un B (2.3. zīm. a).



3. zīm.

Meklējamās saknes vērtība r ir funkcijas $y = f(x)$ grafika krustpunkts ar Ox asi. Šī vērtība nav zināma, bet tās vietā par saknes pirmo tuvinājumu pieņem hordas krustpuntu x_1 ar Ox asi. Hordas, kas iet caur punktiem A un B, vienādojums ir

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x-a}{b-a}. \tag{22}$$

No šī vienādojuma var atrast $x = x_1$, kas atbilst $y = 0$:

$$x_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b) - f(a)}. \tag{23}$$

Tagad saknes vērtība atrodas intervālā $[x_1; b]$. Ja saknes vērtība x_1 neapmierina, to precizē, piemērojot hordu metodi jaunajam nogrieznim x_1b. Savienojot punktu A_1 ar B, atrod saknes otro tuvinājumu x_2, t.i. hordas A_1B krustpunktu ar Ox asi:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(b-x_1)}{f(b) - f(x_1)}. \tag{24}$$

Turpinot šo procesu, atrodam saknes trešo tuvinājumu:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(b-x_2)}{f(b) - f(x_2)} \tag{25}$$

un vispārīgā gadījumā – jebkuru n+1 tuvinājumu kā

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b) - f(x_n)}. \tag{26}$$

Procesu turpina tik ilgi, kamēr iegūstam

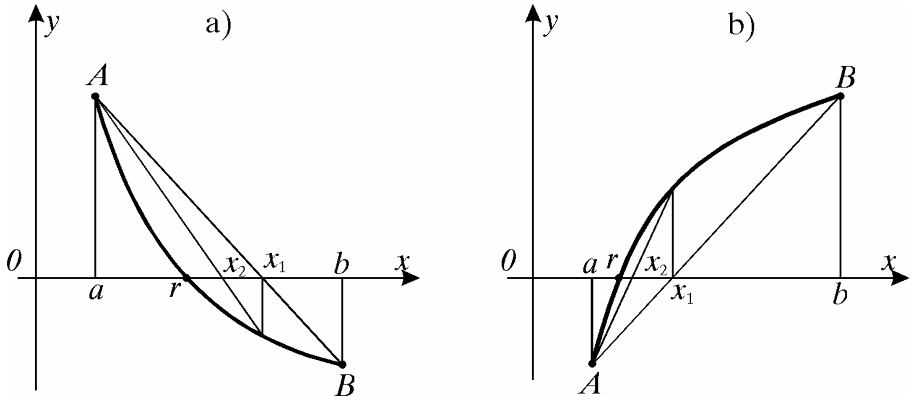
$$\left| x_n - x_{n-1} \right| \leq \Delta ,$$

kur Δ - uzdotā kļūda.

Aplūkotajā gadījumā (3. zīm.) hordas nekustīgais punkts ir punkts B. Ja funkcijas grafiks ir tāds, kā attēlots 4. zīmējumā, tad par hordas nekustīgo punktu jāņem punkts A un kārtējā tuvinājuma aprēķinam jāizmanto formula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)}. \tag{27}$$

Var formulēt vispārēju nosacījumu: ja $f(a) \cdot f''(a) > 0$, jāizvēlas formula (27), bet, ja $f(a) \cdot f''(a) < 0$ – formula (26).



4. zīm.

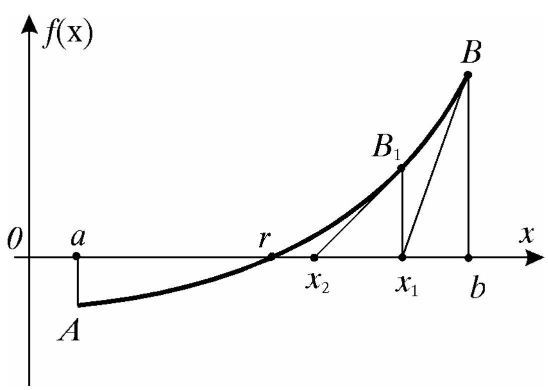
2.4. Ņūtona metode (pieskaru metode)

Pieņemsim, ka dots vienādojums

$$f(x) = 0$$

un kāda no saknēm atdalīta intervālā $[a;b]$, t.i., $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Ņūtona metode pamatojas uz to, ka pietiekami mazā intervālā $[a;b]$ līknes $y = f(x)$ grafiku aizstāj ar pieskari. Meklējamās saknes vērtība r ir funkcijas $y = f(x)$ grafika krustpunkts ar Ox asi (5. zīm.). Šī vērtība nav zināma, bet tās vietā par saknes pirmo tuvinājumu pieņem punktā B vilktās pieskares krustpunktu x_1 ar Ox asi



5. zīm.

Pieskares vienādojums punktā B ir:

$$y - f(b) = f'(b)(x - b). \tag{28}$$

No šī vienādojuma atrod $x = x_1$, kas atbilst $y = 0$:

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}. \tag{29}$$

Tagad vienādojuma sakne atrodas inervālā $[a; x_1]$. Ja šī saknes vērtība neapmierina, to precizē, velkot funkcijas $y = f(x)$ grafikam pieskari punktā B_1. Saknes otro tuvinājumu x_2 atrod kā pieskares krustpunktu ar Ox asi:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \tag{30}$$

Turpinot šo procesu, atrod saknes trešo tuvinājumu

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \qquad (31)$$

un vispārīgā gadījumā – jebkuru n+1 tuvinājumu kā

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (32)$$

Procesu turpina tik ilgi, kamēr iegūst

$$|x_n - x_{n-1}| \le \Delta,$$

kur Δ - uzdotā kļūda.

Formula (29) izmantojama, ja $f'(a) \cdot f''(a) < 0$ (sk. 3. zīm.). Ja $f(a) \cdot f''(a) > 0$ (sk. 4. zīm.), tad pirmo tuvinājumu aprēķina ar formulu

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \qquad (33)$$

bet jekuru n+1 tuvinājumu tāpat kā iepriekš – ar formulu (32).

2.5. Iterāciju metode (atkārtoto tuvinājumu metode)

Pieņemsim, ka dots vienādojums

$$f(x) = 0$$

un kāda no saknēm atdalīta intervālā $[a;b]$, t.i., $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Lai izmantotu iterāciju metodi, vienādojums $f(x) = 0$ ir jāaizstāj ar šādas formas ekvivalentu vienādojumu:

$$x = \varphi(x). \qquad (34)$$

Par saknes pirmo tuvinājumu x_1 var izvēlēties jebkuru vērtību, kas atrodas intervālā $[a;b]$, piem., $x_1 = (a+b)/2$.

Pirmā tuvinājuma vērtību ievietojot vienādojumā (34), iegūstam saknes otro tuvinājumu

$$x_2 = \varphi(x_1). \qquad (35)$$

Iegūto vērtību x_2 pēc tam ievietojot vienādojuma (34) labajā pusē, iegust trešo tuvinājumu

$$x_3 = \varphi(x_2), \qquad (36)$$

un vispārīgā gadījumā – jebkuru n+1 tuvinājumu kā

$$x_{n+1} = \varphi(x_n). \qquad (37)$$

Ja sakņu virknei x_1, x_2,…, x_n,… eksistē robeža, tad iterāciju process konverģē un vienādojuma sakne r ir šīs virknes robeža:

$$r = \lim_{n\to\infty} x_n. \qquad (38)$$

Iterāciju procesu turpina tik ilgi, kamēr tiek sasniegta uzdotā precizitāte, t.i., $|x_n - x_{n-1}| \le \Delta$.

Gadījumā, ja sakņu virknei x_1, x_2,…, x_n,… robeža neeksistē, iterāciju process diverģē un vienādojuma atrisinājumu ar iterāciju metodi nav iespējams iegūt. Lai iterāciju process konverģētu, x_i, kā arī $\varphi(x_i)$ vērtībām jebkurā i-tajā iterācijā jātrodas intervālā $[a;b]$, t.i., $a \le x_i \le b$, $a \le \varphi(x_i) \le b$ un visā intervālā jāizpildās nosacījumam

$$|\varphi'(x)| < 1 . \qquad (39)$$

Pietiek, ja šī nosacījuma izpildi pārbauda intervāla galapunktos:

$$|\varphi'(a)| < 1 \text{ vai}$$
$$|\varphi'(b)| < 1 .$$

Iterāciju procesa konverģence ir atkarīga no funkcijas $\varphi(x)$ veida, ko iegūst, izejas vienādojumu $f(x) = 0$ pārveidojot ekvivalentā vienādojumā $x = \varphi(x)$. Var būt vairāki šādas pārveidošanas varianti. No dažādiem ekvivalentajiem vienādojumiem iterāciju metodes realizēšanai izvēlas to, kuram izpildās nosacījums (39).

3. Interpolācija un ekstrapolācija

3.1. Pamatjēdzieni un interpolācijas uzdevuma nostādne

Praksē nereti rodas nepieciešamība noskaidrot sakarības dažādos procesos un parādībās un izteikt šīs sakarības matemātiskas izteiksmes veidā.

Aplūkosim sakarību formu, kurā kaut kāds lielums y, kas raksturo procesu, ir atkarīgs no savstarpēji neatkarīgiem mainīgiem lielumiem $x_1, x_2,\ldots, x_n$, turklāt katrai mainīgo $x_1, x_2,\ldots, x_n$ kombinācijai atbilst tikai viena noteikta y vērtība. Šādu viennozīmīgu lieluma y atbilstību neatkarīgiem mainīgiem $x_1, x_2,\ldots, x_n$ cauc par funkcionālu sakarību, mainīgo y – par funkciju un mainīgos $x_1, x_2,\ldots, x_n$ – par argumentiem. Funkcionālu sakarību matemātiskā formā pieraksta šādi:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) .$$

Var būt viena vai vairāku argumentu funkcijas.

Ir zināmi trīs funkciju uzdošanas veidi: analītiskais, grafiskais un tabulārais. Interpolācija visbiežāk jāizmanto tad, ja funkcija ir uzdota tabulas veidā. Praksē iznāk darīšana ar gadījumiem, kad jāaprēķina $y = f(x)$ vērtības punktos x, kuri tabulā nav fiksēti. Līdzīga situācija rodas, ja daudzkārt jāizskaitļo analītiskas izteiksmes skaitliskās vērtības dažādos punktos. Tā vietā bieži ir lietderīgi izskaitļot funkcijas $y = f(x)$ vērtības nelielam skaitam punktu, bet pārējos punktos šīs vērtības atrast ar vienkāršākām matemātiskām operācijām, izmantojot informāciju par funkcijas vērtībām ierobežotā skaitā punktu.

Pieņemsim, ka kaut kāda eksperimenta rezultātā diskrētām argumenta vērtībām x_0, x_1, $x_2,\ldots, x_i,\ldots, x_n$ atrastas atbilstošas funkcijas vērtības $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$,…, $y_i = f(x_i)$,…, $y_n = f(x_n)$. Jāatrod šādai tabulas veidā uzdotai funkcijai analītiska izteiksme $F(x)$, kuras vērtības interpolācijas mezglos $x_0, x_1, x_2,\ldots, x_i,\ldots, x_n$ sakristu ar uzdotās funkcijas vērtībām. Procesu, kurā tiek izskaitļotas funkcijas tuvinātas vērtības punktos, kas nesakrīt ar interpolācijas mezgliem, t.i., punktos $x \ne x_i$, sauc par interpolāciju. Ar interpolāciju šaurākā nozīmē saprot gadījumu, kad funkcijas tuvinātā vērtība ir jāatrod punktos x, ja $x_0 < x < x_n$. Funkcijas tuvinātas vērtības atrašanu punktos x, ja $x < x_0$ vai $x > x_n$ sauc par ekstrapolāciju.

Par interpolējošo funkciju $F(x)$ var izvēlēties dažādas klases funkcijas. Praksē ļoti bieži lieto pakāpes funkciju x, x^2,…, x^n kombināciju, kas noved pie n-tās pakāpes interpolācijas polinoma

$$F_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n . \qquad (40$$

Ja interpolējamā funkcija $f(x)$ ir periodiska funkcija, interpolācijas polinomu veido no trigonometrisko funkciju $\sin nx$ un $\cos nx$ kombinācijas.

3.2. Paraboliskā interpolācija

Interpolāciju, kurā izmanto pakāpes polinomus (sk.(39)), sauc par parabolisko interpolāciju.

Paraboliskās interpolācijas uzdevumu var formulēt šādi: intervāla $[a;b]$ interpolācijas mezglos $x_0, x_1, \ldots x_n$ ir uzdota funkcija ar savām n+1 vērtībām, t.i., $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1), \ldots$, $y_n = f(x_n)$; jāatrod tāds n-tās pakāpes polinoms $P_n(x)$, kura vērtības interpolācijas mezglos sakristu ar uzdotās funkcijas vērtībām, t.i.,

$$P_n(x_0) = y_0 ,\ P_n(x_1) = y_1 , \ldots ,\ P_n(x_n) = y_n . \qquad (41)$$

Uzrakstīsim interpolācijas polinomu $P_n(x)$ šādā formā:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n , \qquad (42)$$

kur a_i - pagaidām nezināmi koeficienti, kuri jāatrod, izmantojot informāciju par uzdoto funkciju $y = f(x)$.

Tā kā saskaņā ar (41) polinoms $P_n(x)$ interpolācijas mezglos pieņem vērtības y_0, $y_1, \ldots$, y_n, tad interpolācijas mezglam x_0

$$P_n(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n ,$$

mezglam x_1

$$P_n(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n$$

un mezglam x_n

$$P_n(x_n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n .$$

To visu var uzrakstīt vienādojumu sistēmas veidā, kura satur n+1 vienādojumus ar n+1 nezināmajiem lielumiem – koeficientiem a_i:

$$\begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 , \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n . \end{array} \qquad (43)$$

Lai atrastu koeficientu a_i vērtības, vienādojumu sistēmas (43) atrisināšanai var izmantot jebkuru metodi. Ja , piem., risināšanai izmanto Krāmera formulas, tad iegūstam

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} ,\ a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} , \ldots ,\ a_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} ,$$

kur Δ - sistēmas (43) determinants, Δ_0, $\Delta_1,\ldots$, Δ_n – determinanti, kas iegūti, attiecīgos koeficientus vienādojumu sistēmā (43) nomainot ar brīvajiem locekļiem.

Aprēķinot Δ, Δ_0, $\Delta_1,\ldots$, Δ vērtības un ievietojot izteiksmē (42), pēc pārveidojumiem iegūst interpolācijas polinoma formu, ko sauc par Lagranža interpolācijas polinomu:

$$L_n(x) = y_0 \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\ldots(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} + \ldots$$
$$\ldots + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})} \ , \tag{44}$$

vai saīsinātā pierakstā

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \ . \tag{45}$$

3.3. Galīgās diferences

Praksē nereti ir gadījumi, kad informācija par funkciju ir uzdota tabulas veidā ar nemainīgu argumenta x soli, t.i., interpolācijas mezgli ir sadalīti vienmērīgi. Šajos gadījumos ne tikai vienkāršojas interpolācijas polinoma forma, bet arī koeficientu aprēķināšanas process. Ja argumentu vērtības ir uzdotas ar nemainīgu soli, interpolācijas polinomu konstruēšanā izmanto galīgās diferences un uz to bāzes veidotas speciālas galīgo diferenču tabulas.

Aplūkosim vienmērīgi sadalītu argumentu kopu ar soli h:

$$x_i = x_0 + ih \, , \tag{46}$$

kur i = 0, 1, 2,…, n, un sastādīsim galīgo diferenču tabulu funkcijai $y = f(x)$, kura uzdota tabulas veidā ar savām vērtībām $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$,…, $y_i = f(x_1)$,…, $y_n = f(x_n)$.

Par pirmās kārtas galīgo diferenci sauc starpību starp funkcijas vērtībām blakus mezglos. Pirmās kārtas galīgās diferences mezglos x_0, x_1, x_2,…, x_{n-1} var uzrakstīt kā

$$\begin{aligned}
\Delta y_0 &= y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0) \, , \\
\Delta y_1 &= y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) \, , \\
\Delta y_2 &= y_3 - y_2 = f(x_3) - f(x_2) \, , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta y_{n-1} &= y_n - y_{n-1} = f(x_n) - f(x_{n-1}) \, .
\end{aligned}$$

Vispārīgā veidā jebkuram i-jam mezglam pirmās kārtas galīgā diference ir

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \, . \tag{47}$$

Par otrās kārtas galīgo diferenci sauc starpību starp pirmās kārtas galīgajām diferencēm blakus mezglos:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0,$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2},$$

un vispārīgā veidā jebkuram i-jam mezglam

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i. \tag{48}$$

Līdzīgā veidā var aprēķināt trešās, ceturtās utt. kārtas galīgās diferences. Jebkuras k-tās kārtas galīgo diferenci jebkuram i-jam mezglam var izteikt kā

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i. \tag{49}$$

Funkcijas $y = f(x)$ galīgās diferences lietderīgi attēlot tabulas veidā (sk. 1. tabulu).

1. tabula

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
$x_1 = x_0 + h$	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\dots$
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\dots$	
$x_3 = x_0 + 3h$	y_3	Δy_3	$\dots$		
$x_4 = x_0 + 4h$	y_4	$\dots$			
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Formula (49) un 1. tabula attiecas uz t.s. lejupejošām galīgajām diferencēm, kad argumenta x_0 vērtība izvēlēta tabulas sākumā. Ja x_0 vērtību izvēlas tabulas beigās un aplūko argumentu kopu dilstošā secībā, t.i., vērtības x_0, $x_{-1} = x_0 - h$, $x_{-2} = x_0 - 2h$, …, $x_{-i} = x_0 - ih$, kur $i = 0, 1, 2, \dots, n$, tad iegūst augšupejošās galīgās diferences (sk. 2. tabulu), kuras var aprēķināt ar formulu

$$\Delta^k y_{-i} = \Delta^{k-1} y_{-(i+1)} - \Delta^{k-1} y_{-i}. \tag{50}$$

2. tabula

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x_{-4} = x_0 - 4h$	y_{-4}	$\dots$			
$x_{-3} = x_0 - 3h$	y_{-3}	Δy_{-3}	$\dots$		
$x_{-2} = x_0 - 2h$	y_{-2}	Δy_{-2}	$\Delta^2 y_{-2}$	$\dots$	
$x_{-1} = x_0 - h$	y_{-1}	Δy_{-1}	$\Delta^2 y_{-1}$	$\Delta^3 y_{-1}$	$\dots$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$

Izvēloties x_0 tabulas vidusdaļā, jebkuras k-tās kārtas galīgās diferences aprēķinam izmantojama formula

$$\Delta^k y_{\pm i} = \Delta^{k-1} y_{\pm(i+1)} - \Delta^{k-1} y_{\pm i}, \qquad (51)$$

kur "+" zīme attiecas uz lejupejošām, bet "–" zīme – uz augšupejošām galīgajām diferencēm. Šai formulai atbilst centrālo galīgo diferenču tabula (sk. 3. tabulu).

3. tabula

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
…	…	…	…	…	…
$x_{-2} = x_0 - 2h$	y_{-2}				
		Δy_{-2}			
$x_{-1} = x_0 - h$	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$	
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$	
$x_1 = x_0 + h$	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1			
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2				
…	…	…	…	…	…

3.4. Ņūtona interpolācijas polinomi

Pieņemsim, ka funkcija $y = f(x)$ uzdota tabulas veidā ar vērtībām $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1), \ldots,$ $y_n = f(x_n)$ vienmērīgi sadalītos interpolācijas mezglos x_0, $x_1 = x_0 + h, \ldots,$ $x_n = x_0 + nh$. Jākonstruē tāds n-tās kārtas interpolācijas polinoms $P_n(x)$, kurš interpolācijas mezglos dotu vērtības, kas vienādas ar uzdotajām funkcijas vērtībām, t.i.,

$$P_n(x_0) = y_0,\ P_n(x_1) = y_1,\ \ldots,\ P_n(x_n) = y_n. \qquad (52)$$

Interpolācijas polinomu meklēsim šādā formā:

$$\begin{aligned} P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0(x - x_1)(x - x_2) + \ldots \\ \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n). \end{aligned} \qquad (53)$$

Šajā izteiksmē pagaidām nezināmi ir interpolācijas polinoma koeficienti a_0, a_1, $a_2, \ldots, a_n$. Lai noteiktu koeficientu a_0, izteiksmē (53) ievietosim $x = x_0$. Tad visi locekļi, izņemot pirmo locekli, pārvēršas par nulli un $P_n(x_0) = a_0$, jeb saskaņā ar (52)

$$a_0 = y_0.$$

Lai noteiktu koeficientu a_1, atradīsim pirmās kārtas galīgo diferenci polinomam (53) punktā x. Saskaņā ar galīgās diferences definīciju

$$\Delta P_n(x) = P_n(x+h) - P_n(x). \tag{54}$$

Šajā izteiksmē

$$\begin{aligned} P_n(x+h) &= a_0 + a_1(x - x_0 + h) + a_2(x - x_0 + h)(x - x_1 + h) + \\ &+ a_3(x - x_0 + h)(x - x_1 + h)(x - x_2 + h) + \ldots + a_n(x - x_0 + h)(x - x_1 + h)\ldots \\ &\ldots(x - x_{n-1} + h). \end{aligned} \tag{55}$$

Ievietojot (52) un (53) izteiksmē (55), iegūstam:

$$\begin{aligned} \Delta P_n(x) &= a_0 - a_0 + a_1[(x - x_0 + h) - (x - x_0)] + \\ &+ a_2[(x - x_0 + h)(x - x_1 + h) - (x - x_0)(x - x_1)] + \\ &+ a_3[(x - x_0 + h)(x - x_1 + h)(x - x_2 + h) - (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)] + \ldots \\ &\ldots + a_n[(x - x_0 + h)(x - x_1 + h)\ldots(x - x_{n-1} + h) - (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})], \end{aligned}$$

vai, izdarot pārveidojumus,

$$\begin{aligned} \Delta P_n(x) &= ha_1 + 2ha_2(x - x_0) + 3ha_3(x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ &\ldots + nha_n(x - x_0(x - x_1)\ldots(x - x_{n-2}). \end{aligned}$$

Ievietojot šajā izteiksmē $x = x_0$, iegūstam

$$\Delta P_n(x_0) = ha_1,$$

bet tā kā

$$\Delta P_n(x_0) = y_1 - y_0 = \Delta y_0,$$

tad $\Delta y_0 = a_1 h$ un

$$a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

Lai noteiktu koeficientu a_2, polinomam (53) aprēķina otrās kārtas galīgo diferenci

$$\Delta^2 P_n(x) = \Delta P_n(x+h) - \Delta P_n(x),$$

no kuras pēc ievietošanas un pārveidošanas iegūst

$$\Delta^2 P_n(x) = 2!h^2 a_2 + 3!h^2 a_3(x - x_0) + \ldots + n!h^2 a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-3}).$$

Ja šajā izteiksmē ievieto $x = x_0$, tad

$$\Delta^2 P_n(x_0) = 2!h^2 a_2,$$

bet tā kā

$$\Delta^2 P_n(x_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0,$$

tad $\Delta^2 y_0 = 2!h^2 a_2$ un

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} .$$

Aprēķinot polinoma $P_n(x)$ augstākas kārtas galīgās diferences un pieņemot $x = x_0$, var iegūt formulu koeficientu a_i aprēķināšanai vispārīgā veidā:

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!h^i} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{56}$$

kur pieņemts $0! = 1$ un $\Delta^0 y = y$.

Ievietojot atrastās koeficienta a_i vērtības polinomā (53), iegūstam:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \\ &+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{57}$$

Formulu (57) sauc par Ņūtona pirmo interpolācijas formulu. Praksē šo formulu lieto vienkāršakā formā, ko iegūst, izmantojot mainīgo

$$t = \frac{x - x_0}{h}. \tag{58}$$

Ievietojot šo t vērtību formulā (57), iegūstam

$$\begin{aligned} P_n(x) &= y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots \\ &\ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \end{aligned} \tag{59}$$

Ņūtona pirmo interpolācijas formulu ((57) vai (59)) ieteicams lietot interpolācijas tabulas sākumā, t.i., mazām t absolūtajām vērtībām.

Var atzīmēt, ka gadījumā, ja interpolācijas mezglu skaits $n = 1$, iegūst lineārās interpolācijas formulu

$$P(x) = y_0 + t\Delta y_0 ;$$

ja $n = 2$ − kvadrātiskās interpolācijas formulu

$$P_2(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0 \text{ utt.}$$

Ja interpolācija jāizdara tabulas beigu daļā, izmanto Ņūtona otro interpolācijas formulu. Šajā formulā izmanto augšupejošās galīgās diferences un interpolācijas polinomu meklē šādā formā:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_{-1}) + a_3(x - x_0(x - x_{-1})(x - x_{-2}) + \ldots \\ &\ldots + a_n(x - x_0)(x - x_{-1})\ldots(x - x_{-(n-1)}). \end{aligned}$$

Šajā polinomā interpolācijas mezgli ir x_0, $x_{-1} = x_0 - h$, $x_{-2} = x_0 - 2h, \ldots$, bet funkcijas vērtības mezglos – $y_0 = f(x_0)$, $y_{-1} = f(x_{-1})$, $y_{-2} = f(x_{-2}), \ldots$ Rīkojoties tāpat kā izvedot Ņūtona pirmo interpolācijas formulu, iegūstam

$$\begin{aligned} P_n(x) &= y_0 + \frac{\Delta y_{-1}}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_{-2}}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_{-1}) + \\ &+ \frac{\Delta^3 y_{-3}}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_{-1})(x - x_{-2}) + \ldots + \frac{\Delta^n y_{-n}}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_{-1})\ldots(x - x_{-(n-1)}), \end{aligned} \tag{60}$$

vai, izmantojot mainīgo t (sk. (58)),

$$\begin{aligned} P_n(x) &= y_0 + t\Delta y_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_{-3} + \ldots \\ &\ldots + \frac{t(t+1)(t+2)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_{-n} . \end{aligned} \tag{61}$$

Nobeigumā formulēsim dažas rekomendācijas Ņūtona interpolācijas polinomu izmantošanā:

1) interpolācijas mezglu x_0 lietderīgi izvēlēties iespējami tuvāk dotajai argumenta vērtībai x;
2) tabulas sākuma daļai jāizmanto Ņūtona pirmā interpolācijas formula (atbilstoši lejupejošās galīgās diferences), bet tabulas beigu daļai – Ņūtona otrā interpolācijas formula (atbilstoši augšupejošās galīgās diferences);
3) ja funkcijas vērtības uzdotas ar p zīmīgajiem cipariem, tad nav jēgas ņemt vērā galīgās diferences, kuru kārta k ir lielāka par p.

3.5. Funkciju izvirzīšana Furjē rindā

Šeit aplūkosim speciālu interpolācijas paņēmienu – interpolāciju, kurā izmanto trigonometrisko polinomu, kas satur trigonometrisko funkciju $\sin nx$ un $\cos nx$ lineāru kombināciju.

Daudzos tehniskos uzdevumos, it sevišķi elektrotehnikā, ir darīšana ar periodiskām funkcijām, kuras apraksta periodiskus jeb cikliskus procesus, piem., maiņstrāva, magnētiskās indukcijas sadalījums elektriskās mašīnas gaisa spraugā, elektroierīču atkārtoti īslaicīgi darba režīmi u.tml.

Funkciju $f(x)$ sauc par periodisku ar periodu T, ja izpildās nosacījums (63)

$$f(x) = f(x+T) . \tag{62}$$

Šādu funkciju attēlošanai visērtāk izmantot trigonometrisko rindu vai šīs rindas parciālo summu.

Par trigonometrisko rindu sauc šādu funkcionālo rindu:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) , \tag{63}$$

kur a_n un b_n – no x neatkarīgi reāli skaitļi.

Ja rinda (63) jebkurām x vērtībām intervālā $[-\pi;\pi]$ vai $[0;2\pi]$ konverģē, tad šī rinda attēlo periodisku funkciju $f(x)$ ar periodu $T = 2\pi$. Rindu (63) sauc par Furjē rindu un tās koeficientus aprēķina ar formulām

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx\,, \tag{64}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx\,, \tag{65}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx\,. \tag{66}$$

3.6. Trigonometriskā interpolācija un skaitliskā harmoniku analīze

Operāciju, kurā funkciju $f(x)$ aizstāj ar Furjē rindu un aprēķina šīs rindas koeficientus, sauc par harmoniku analīzi. Praktiskos aprēķinos parasti var aprobežoties ar Furjē rindas pirmajiem locekļiem un tādējādi $f(x)$ vietā iegūst tuvinātu analītisku izteiksmi N-tās kārtas trigonometriska polinoma veidā:

$$Q_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,. \tag{67}$$

Jāatzīmē, ka rindas koeficientu aprēķināšanai formulas (64) – (66) ne vienmēr ir izmantojamas, piem., ja funkcija uzdota grafika vai tabulas veidā vai arī izteikta ar tādu analītisku izteiksmi, kurai integrāli nevar izteikt ar elementāru funkciju. Tāpēc rodas nepieciešamība rindas koeficientus noteikt ar tuvinātām metodēm, izmantojot skaitlisko integrēšanu un informāciju par galīga skaita uzdotajām funkcijas vērtībām.

Skaitliskās harmoniku analīzes uzdevumu var formulēt šādi: intervālā $[0;T]$ ir uzdota periodiska funkcija $y = f(x)$ ar savām m vērtībām $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$,…, $y_k = f(x_k)$,…, kur

$$x_k = \frac{kT}{m} \quad (k = 0,1,2,\ldots,\ m-1), \tag{68}$$

un šī funkcija jāaizstāj ar N-tās kārtas trigonometrisko polinomu, kuru atšķirībā no (67) vispārīgā veidā uzrakstīsim kā

$$Q_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos n\frac{2\pi}{T}x + b_n \sin n\frac{2\pi}{T}x)\,. \tag{69}$$

Šajā izteiksmē x atkarībā no aplūkojamā procesa var būt laika koordināta, telpiskā koordināta u.tml. Reizinātājs $2\pi/T$ šo kordinātu pārveido leņķa mērvienībās, t.i., radiānos. Piemēram, aplūkojot laikā mainīgu procesu maiņstrāvas ķēdēs

$$\frac{2\pi}{T}x = \frac{2\pi}{T}t = 2\pi ft = \omega t\,,$$

vai, aplūkojot magnētiskā lauka sadalījumu elektriskās mašīnas gaisa spraugā atkarībā no telpiskās koordinātas *x*,

$$\frac{2\pi}{T}x = \frac{2\pi}{2\tau}x = \frac{\pi}{\tau}x\,,$$

kur τ – pola iedaļa.

Rindas koeficientu aprēķinam šajā gadījumā izmantojamas formulas, kas iegūtas no (64) – (66):

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos n\frac{2\pi}{T}x dx\,, \tag{70}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin n\frac{2\pi}{T}x dx \tag{71}$$

$$(n = 0,1,2,\ldots, N).$$

Izmantojot skaitliskās metodes harmoniku analīzē, periodu *T* sadala *m* vienādās daļās (6. zīm.). Izteiksmes (70) un (71) aizstāj ar tuvinātām formulām, ievietojot šajās formulās

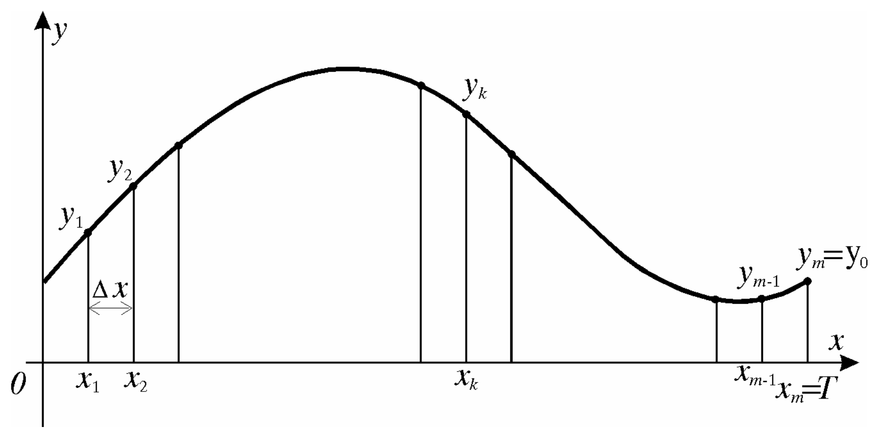
$$dx \approx \Delta x = \frac{T}{m}\,, \tag{72}$$

x vietā – argumenta diskrētās vērtības no (68), bet $f(x)$ vietā – y_k, t.i., funkcijas vērtības punktos x_k. Tad pēc pārveidojumiem iegūstam:

$$a_n = \frac{2}{m}\sum_{k=0}^{m-1} y_k \cos n\frac{2\pi k}{m}\,, \tag{73}$$

$$b_n = \frac{2}{m}\sum_{k=0}^{m-1} y_k \sin n\frac{2\pi k}{m} \tag{74}$$

$$(n = 0,1,2,\ldots, N).$$



6. zīm.

3.7. Furjē rindu diferencēšana un integrēšana

Pieņemsim, ka periodiska funkcija $f(x)$ izteikta ar Furjē rindu

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\frac{2\pi}{T}x + b_n \sin n\frac{2\pi}{T}x)\,. \tag{75}$$

Atradīsim šīs funkcijas atvasinājumu $f'(x)$, diferencējot izteiksmes (75) labo pusi pa locekļiem:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-n\frac{2\pi}{T}a_n\sin n\frac{2\pi}{T}x+n\frac{2\pi}{T}b_n\cos\frac{2\pi}{T}x)\,. \tag{76}$$

Apzīmējot $f'(x)=F(x)$, var uzrakstīt

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\frac{2\pi}{T}x+B_n\sin n\frac{2\pi}{T}x)\,. \tag{77}$$

Salīdzinot (76) un (77), ir redzams, ka

$$A_n=n\frac{2\pi}{T}b_n\,,\ B_n=-n\frac{2\pi}{T}a_n\,. \tag{78}$$

Tādējādi Furjē rindas diferencēšana faktiski reducējas uz koeficientu A_n un B_n aprēķināšanu jaunai Furjē rindai $F(x)$, ar kuru izteikts funkcijas $f(x)$ atvasinājums. Jāatzīmē, ka, diferencējot Furjē rindu, iegūst sliktāk konverģējošu rindu, vai atsevišķos gadījumos pat diverģējošu rindu. Tāpēc Furjē rindas konverģences nosacījumi katrā konkrētā gadījumā ir jāpēta atsevišķi.

Integrējot izteiksmes (75) labo pusi pa locekļiem, iegūstam:

$$\int f(x)dx=\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\frac{T}{2\pi}a_n\sin n\frac{2\pi}{T}x-\frac{1}{n}\frac{T}{2\pi}\cos n\frac{2\pi}{T}x\right), \tag{79}$$

vai, apzīmējot $\int f(x)dx=F(x)$,

$$F(x)=\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\frac{2\pi}{T}x+B_n\sin n\frac{2\pi}{T}x\,, \tag{80}$$

kur

$$A_n=-\frac{1}{n}\frac{T}{2\pi}b_n\,,\ B_n=\frac{1}{n}\frac{T}{2\pi}a_n\,. \qquad 81)$$

Tādējādi arī Furjē rindas integrēšana reducējas uz koeficientu A_n un B_n aprēķināšanu jaunai rindai $F(x)$, ar kuru izteikts funkcijas $f(x)$ integrālis.

4. Datu matemātiskā apstrāde

4.1. Vispārīgi norādījumi un uzdevuma nostādne

Pētot dažādus fizikālus procesus, rodas nepieciešamība noskaidrot sakarības šajos procesos un šīs sakarības izteikt matemātiskas izteiksmes veidā.

Pieņemsim, ka eksperimenta rezultātā kaut kāda fizikāla lieluma x vērtībām $x_1, x_2,\ldots, x_n$ atrastas atbilstošas cita, no x atkarīga, fizikāla lieluma y vērtības $y_1, y_2,\ldots, y_n$. Jāatrod analītiska izteiksme, kas aprakstītu šo funkcionālo sakarību. Šādu analītisku izteiksmju iegūšanu no novērojuma vai eksperimenta rezultātiem sauc par empīrisko formulu sintēzi.

Empīrisko formulu sintēze būtībā ir saistīta ar aproksimāciju, t.i., kaut kādas dotas funkcionālas sakarības aizstāšanu ar citu – tuvinātu funkcionālu sakarību. Praksē aproksimāciju lietderīgi izmantot arī citos gadījumos:

1) ja funkcija uzdota sarežģītas analītiskas izteiksmes veidā un daudzkārt jāizskaitļo šīs funkcijas vērtības dažādos punktos;
2) jāatrod analītiski uzdotas funkcijas integrālis, bet šo integrāli nevar izteikt ar elementāru funkciju;
3) funkcija uzdota sarežģītas analītiskas izteiksmes veidā, bet praktiskos aprēķinos interesē tikai x izmaiņas noteikts diapazons, kurā funkcija ir aproksimējama ar samērā vienkāršu izteiksmi.

Visos minētajos gadījumos izvirzās viens un tas pats uzdevums: doto funkciju $f(x)$ aproksimēt ar citu – tuvinātu funkciju $\varphi(x)$. Funkcijai $\varphi(x)$ jābūt pietiekami vienkāršai, tai jāattēlo aproksimējamās funkcijas $f(x)$ visas raksturīgās īpatnības, kā arī jānodrošina nepieciešamā precizitāte.

Realizējot aproksimāciju, viens no būtiskākajiem jautājumiem ir jautājums par aproksimējamās un aproksimējošās funkcijas sakritības kritērijiem, kas raksturo aproksimācijas precizitāti.

Viens no plašāk lietojamiem sakritības kritērijiem ir Čebiševa kritērijs, kurā tiek novērtēta maksimālā starpība starp funkciju $f(x)$ un $\varphi(x)$ vērtībām mezglos x_i:

$$\rho = \max\left|f(x_i) - \varphi(x_i)\right| \quad (i = 1,2,\dots, n). \tag{82}$$

Praksē visvairāk interesē gadījums, kad $\rho = 0$. Tas nozīmē, ka funkciju $f(x)$ un $\varphi(x)$ vērtības mezglos x_i sakrīt (šādu aproksimācijas veidu sauc par interpolāciju (sk. iepriekš 3.1, 3.2, 3.4)).

Par sakritības kritēriju var izvēlēties arī minimālo summāro novirzi starp funkciju $f(x)$ un $\varphi(x)$ vērtībām mezglos x_i. Izmantojot šo kritēriju, aprēķina lielumu

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - \varphi(x_i)] \tag{83}$$

un par aproksimējošo funkciju $\varphi(x)$ no vairākām funkcijām izvēlas to, kurai ρ vērtība ir vismazākā. Jāatzīmē gan, ka šis kritērijs ir jālieto uzmanīgi, jo minimālo ρ vērtību saskaņā ar (83) var iegūt arī tad, ja novirzes atsevišķos mezglos ir pietiekami lielas, bet ar pretējām zīmēm, un tāpēc negatīvās un pozitīvās novirzes savstarpēji kompensējas.

Visbiežāk funkciju $f(x)$ un $\varphi(x)$ sakritības novērtēšanai izmanto kritēriju, kura pamatā ir vismazāko kvadrātu metode. Saskaņā ar šo metodi aprēķina lielumu

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2 \tag{84}$$

un par aproksimējošo funkciju $\varphi(x)$ izvēlas to, kura nodrošina vismazāko ρ vērtību. Šis kritērijs ir visobjektīvākais, jo izslēdz nekorektu aproksimējošās funkcijas izvēli, kā tas var notikt, piem., izmantojot kritēriju (83).

Empīrisko formulu sintēze ietver divus etapus:

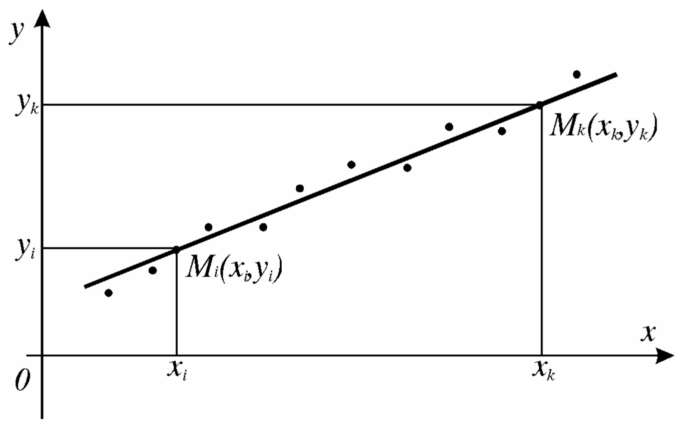
1) empīriskās formulas izvēli;
2) izvēlētās formulas koeficientu noteikšanu.

4.2. Empīrisko formulu koeficientu noteikšanas metodes

Empīriskās formulas koeficientu noteikšanai var izmantot trīs metodes:
1) izvēlēto punktu metodi;
2) vidējo noviržu metodi;
3) vismazāko kvadrātu metodi.

Aplūkosim šo metožu būtību vispirms vienkāršākajam gadījumam – lineārai funkcionālai sakarībai. Pieņemsim, ka eksperimenta rezultātā iegūta empīriska sakarība starp argumenta x vērtībām x_1, x_2,…, x_n un funkcijas y vērtībām y_1, y_2,…, y_n, turklāt tāda, ka, attēlojot šos punktus grafikā (sk. 7. zīm.) , iegūstam sakarību, kas tuva lineārai

$$y = ax + b . \tag{85}$$



7. zīm.

Noteiksim formulas (85) koeficientus a un b, izmantojot minētās trīs metodes.

Izvēlēto punktu metode. Novilksim pēc iespējas tuvu 7. zīmējumā attēlotajiem punktiem taisni. Uz šīs taisnes patvaļīgi izvēlēsimies divus punktus $M_i(x_i, y_i)$ un $M_k(x_k, y_k)$ un grafiski noteiksim šo punktu koordinātas, kuras, ievietojot izteiksmē (85), iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{aligned} y_i &= ax_i + b , \\ y_k &+ ax_k + b . \end{aligned} \tag{86}$$

Atrisinot šo sistēmu, iegūstam

$$a = \frac{y_k - y_i}{x_k - x_i}, \quad b = \frac{x_k y_i - x_i y_k}{x_k - x_i} . \tag{87}$$

Vidējo noviržu metode. Saskaņā ar šo metodi vislabākais tuvinājums novilktajai taisnei ir tad, kad eksperimentālo un izskaitļoto vērtību starpību algebriskā summa visos punktos ir vienāda ar nulli. Lai noteiktu koeficientus a un b ar vidējo noviržu metodi, visus tabulas datus sadala divās grupās un katrai no tām uzraksta

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} [y_i - (ax_i + b)] = 0 , \\ &\sum_{k=m+1}^{n} [y_k - (ax_k + b)] = 0 , \end{aligned} \tag{88}$$

kur m – punktu skaits tabulas pirmajā daļā; n – kopējais punktu skaits.

Pārveidojot šos vienādojumus, var iegūt

$$\sum_{i=1}^{m} y_i - a\sum_{i=1}^{m} x_i - mb,$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} y_k - a\sum_{k=m+1}^{n} x_k - (n-m)b = 0,$$

vai

$$\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{m} x_i + mb &= \sum_{i=1}^{m} y_i, \\ a\sum_{k=m+1}^{n} x_k + (n-m)b &= \sum_{k=m+1}^{n} y_k. \end{aligned} \qquad (89)$$

Atrisinot iegūto vienādojumu sistēmu, iegūstam koeficientus a un b.

Var atzīmēt, ka tabulas datus vēlams sadalīt divās grupās tā, lai $\sum_{i=1}^{m} y_i \approx \sum_{k=m+1}^{n} y_k$.

Vismazāko kvadrātu metode. Saskaņā ar vismazāko kvadrātu metodi koeficientus a un b iegūst, minimizējot summāro kvadrātisko novirzi:

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2 = \min.$$

Izmantojot divu argumentu funkcijas

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

ekstrēma nosacījumus

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F(a,b)}{\partial b} = 0,$$

iegūstam

$$\frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 = 0,$$

jeb

$$\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b)(-1) = 0.$$

Pārveidojot šīs izteiksmes, iegūst vienādojumu sistēmu koeficientu a un b aprēķināšanai:

$$\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=2}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb &= \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{aligned} \qquad (90)$$

4.3. Empīrisko formulu izvēle nelineārām sakarībām

Ja empīriskā sakarība ir nelineāra, šīs sakarības grafiskais attēlojums neļauj spriest par to, kāda tipa analītiska izteiksme ir vispiemērojamākā aproksimācijai. Aplūkosim sākumā šādas vienkāršākās funkcijas ar diviem koeficientiem:

1) lineāru funkciju

$$y = ax + b; \tag{91}$$

2) eksponentfunkciju

$$y = ab^x; \tag{92}$$

3) daļveida racionālu funkciju

$$y = \frac{1}{ax + b}; \tag{93}$$

4) logaritmisko funkciju

$$y = a \ln x + b; \tag{94}$$

5) pakāpes funkciju

$$y = ax^b; \tag{95}$$

6) hiperbolisko funkciju

$$y = a + \frac{b}{x}; \tag{96}$$

7) daļveida racionālu funkciju

$$y = \frac{x}{ax + b}. \tag{97}$$

Lai aproksimācijai izvēlētos vispiemērotāko funkciju $y = f(x, a, b)$, kas atbilst konstruētajam grafikam, jāizdara papildus aprēķini. Šim nolūkam no tabulas izvēlas divus punktus, kuri ir pietiekami droši un pēc iespējas tālāk viens no otra. Pieņemsim, ka tie ir punkti ar argumenta vērtībām x_1, x_n un funkcijas vērtībām y_1, y_n. No x_1 un x_n aprēķina vidējo aritmētisko vērtību

$$x_{ar} = \frac{x_1 + x_n}{2},$$

vidējo ģeometrisko vērtību

$$x_{ģeom} = \sqrt{x_1 x_n}$$

un vidējo harmonisko vērtību

$$x_{har} = \frac{2x_1 x_n}{x_1 + x_n}.$$

Aprēķinātām x_{ar}, $x_{ģeom}$, x_{har} vērtībām no konstruētā grafika atrod atbilstošās y vērtības:

$$x_{ar} \to y_1^*,$$
$$x_{ģeom} \to y_2^*,$$
$$x_{har} \to y_3^*.$$

No funkcijas vērtībām y_1 un y_n aprēķina vidējo aritmētisko vērtību

$$y_{ar} = \frac{y_1 + y_n}{2},$$

vidējo ģeometrisko vērtību

$$y_{ģeom} = \sqrt{y_1 y_n}$$

un vidējo harmonisko vērtību

$$y_{har} = \frac{2 y_1 y_n}{y_1 + y_n}.$$

No grafika iegūtās vērtības y_1^*, y_2^*, y_3^* salīdzina ar aprēķinātajām vidējām vērtībām y_{ar}, $y_{ģeom}$, y_{har} un atrod starpību absolūtās vērtības

$$\varepsilon_1 = \left| y_1^* - y_{ar} \right|,$$
$$\varepsilon_2 = \left| y_1^* - y_{ģeom} \right|,$$
$$\varepsilon_3 = \left| y_1^* - y_{har} \right|,$$
$$\varepsilon_4 = \left| y_2^* - y_{ar} \right|,$$
$$\varepsilon_5 = \left| y_2^* - y_{ģeom} \right|,$$
$$\varepsilon_6 = \left| y_3^* - y_{ar} \right|,$$
$$\varepsilon_7 = \left| y_3^* - y_{har} \right|.$$

No šīm aprēķinātajām ε vērtībām atrod minimālo:

$$\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_7).$$

Ja $\varepsilon_{\min} = \varepsilon_1$, izvēlas formulu (91), ja $\varepsilon_{\min} = \varepsilon_2$ – formulu (92), ja $\varepsilon_{\min} = \varepsilon_3$ – formulu (93) utt.

Lai noteiktu izvēlētās formulas koeficientus a un b, rīkojas tāpat kā lineāras sakarības gadījumā. Ar jebkuru no trim metodēm iegūst divu vienādojumu sistēmu, kuras atrisinājums dod meklējamo koeficientu vērtības. Vienādojumu sistēma vispārīgā veidā izvēlēto punktu metodei ir šāda:

$$\begin{aligned} y_i &= f(x_i, a, b), \\ y_k &= f(x_k, a, b), \end{aligned} \tag{98}$$

kur x_i, x_k, y_i, y_k – izvēlēto punktu $M_i(x_i, y_i)$ un $M_k(x_k, y_k)$ koordinātas.

Izmantojot vidējo noviržu metodi, iegūst vienādojumu sistēmu

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} f(x_i, a, b) &= \sum_{i=1}^{m} y_i, \\ \sum_{k=m+1}^{n} f(x_k, a, b) &= \sum_{k=m+1}^{n} y_k, \end{aligned} \tag{99}$$

kur x_i, y_i punktu koordinātas tabulas pirmajā daļā; x_k, y_k – punktu koordinātas tabulas otrajā daļā.

Ja koeficientu a un b noteikšanai izmanto vismazāko kvadrātu metodi, vienādojumu sistēma vispārīgā veidā ir šāda:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}[y_i - f(x_i, a, b)]f'_a(x_i, a, b) = 0,\\&\sum_{i=1}^{n}[y_i - f(x_i, a, b)]f'_b(x_i, a, b) = 0,\end{aligned} \qquad (100)$$

kur $f'_a(x_i, a, b)$ un $f'_b(x_i, a, b)$ – funkcijas $f(x_i, a, b)$ parciālie atvasinājumi attiecīgi pēc a un b.

4.4. Koordinātu transformācija

Izmantojot vidējo noviržu un vismazāko kvadrātu metodi empīrisko formulu koeficientu noteikšanai vispārīgāgā gadījumā izmantojamas izteiksmes (99) un (100). Taču atsevišķos gadījumos (piem,. formulām (93), (95), (97)) jārisina nelineāru vienādojumu sistēma, kas būtiski sarežģī koeficientu aprēķināšnas procesu. Lai izvairītos no šādas situācijas, izmanto koordinātu transformācijas jeb linearizācijas metodi.

Aplūkosim koordinātu sistēmā *xOy* nelineāru funkciju $y = f(x)$. Pārejot uz citu koordinātu sistēmu *XOY*, šo funkciju var pārveidot par lineāru funkciju

$$Y = AX + B. \qquad (101)$$

Lai šādu pārveidošanu realizētu, jāatrod tādas funkcionālas sakarības $X = f_1(x)$ un $Y = f_2(y)$, kuras nodrošina funkcijas (101) lineāru raksturu, turklāt koeficienti A un B ir atkarīgi no nelineārās funkcijas koeficientiem a un b.

Noskaidrosim, kā, izmantojot koordinātu transformāciju, nelineārās funkcijas (92) – (97) var pārveidot par lineārām funkcijām.

Logaritmējot izteiksmes (92) abas puses, iegūstam $\ln y = x \ln b + \ln a$. Apzīmējot $Y = \ln y$, $X = x$, $A = \ln b$, $B = \ln a$, iegūstam lineāru funkciju $Y = AX + B$.

Daļveida racionālo funkciju (93) var pārveidot, izmantojot apgrieztu sakarību $1/y = ax + b$. Apzīmējot $Y = 1/y$, $X = x$, $A = a$, $B = b$, iegūst lineāru funkciju.

Logaritmisko funkciju (94) var aizstāt ar lineāru funkciju, ievedot apzīmējumus $Y = y$, $X = \ln x$, $A = a$, $B = b$.

Pakāpes funkciju var pārveidot, logaritmējot izteiksmes (95) abas puses: $\ln y = \ln a + b \ln x$. Lineāru funkciju tad iegūst, ievedot apzīmējumus $Y = \ln y$, $X = \ln x$, $A = b$, $B = \ln a$.

No hiperboliskas funkcijas (96) lineāru funkciju iegūst, ja apzīmē $Y = y$, $X = 1/x$, $A = b$, $B = a$.

Daļveida racionālo funkciju (97) var pārveidot, izmantojot apgrieztu sakarību $1/y = (ax + b)/x$, jeb $1/y = a + b/x$. Šajā gadījumā lineāru funkciju iegūst, ja apzīmē $Y = 1/y$, $X = 1/x$, $A = b$, $B = a$.

Iepriekš aplūkotajos pārveidojumos iegūtās sakarības apkopotas 4. tabulā.

4. tabula

Formula	Y	X	A	B
(91)	y	x	a	b
(92)	$\ln y$	x	$\ln b$	$\ln a$
(93)	$1/y$	x	a	b
(94)	y	$\ln x$	a	b
(95)	$\ln y$	$\ln x$	b	$\ln a$
(96)	y	$1/x$	b	a
(97)	$1/y$	$1/x$	b	a

Tādējādi, sintezējot empīriskas formulas ar diviem koeficientiem, var rekomendēt šādu darbību secību:

1) aprēķina novirzes ε (sk. 4.3) un, salīdzinot to vērtības, izvēlas vienu no formulām (92) – (97);
2) izmantojot 4. tabulas otrajā un trešajā kolonnā dotās sakarības, no sākotnēji dotajām mainīgo x_i un y_i vērtībām atrod šo mainīgo transformētās vērtības X_i un Y_i;
3) izmantojot lineāru sakarību koeeficientu aprēķināšanas formulas (89) un (90), atrod linearizētās funkcijas (101) koeficientus *A* un *B*;
4) no 4. tabulas ceturtajā un piektajā kolonnā dotajām sakarībām atrod koeficientus *a* un *b*.

4.5. Empīriskās formulas ar trīs un vairāk koeficientiem

Iepriekš aplūkotās formulas (sk. (91) – (97) ļauj pietiekami precīzi aproksimēt daudz un dažādas empīriskas sakarības. Tomēr šīs formulas nespēj nodrošināt visus praksē sastopamos aproksimācijas uzdevumus un tāpēc jāizmanto sarežģītākas analītiskas izteiksmes, kas satur vairākas funkciju klases un atbilstoši vairāk koeficientus.

Praksē nelineāru sakarību $y = f(x)$ bieži var aproksimēt ar otrās kārtas pakāpes polinomu

$$y = ax^2 + bx + c\,. \tag{102}$$

Ja eksperimēntāli iegūto x un y vērtību skaits $n = 3$, tad polinoma koeficientus a, b un c var atrast ar izvēlēto punktu metodi. Eksperimentālo datu vērtības x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 ievietojot izteiksmē (102), var iegūt trīs vienādojumu sistēmu

$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1 + c &= y_1, \\ ax_2^2 + bx_2 + c &= y_2, \\ ax_3^2 + bx_3 + c &= y_3, \end{aligned} \tag{103}$$

kuras atrisinājums dod meklējamo koeficientu vērtības.

Ja punktu skaits $n > 3$, izvēlēto punktu metode, aproksimējot ar otrās pakāpes polinomu, var dot ļoti neprecīzu rezultātu, turklāt šis rezultāts nav viennozīmīgs un ir atkarīgs no punktu izvēles. Precizitātes paaugstināšanai tad var izmantot vidējo noviržu metodi (sk. 4.2), saskaņā ar kuru tabulas datus sadala trīs grupās, katrā no tām pielīdzinot nullei noviržu algebrisko summu:

$$\sum_{i=1}^{l}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]=0,$$

$$\sum_{j=l+1}^{m}[y_j-(ax_j^2+bx_j+c)]=0,$$

$$\sum_{k=m+1}^{n}[y_k-(ax_k^2+bx_k+c)]=0,$$

kur l , $(m-l)$, $(n-m)$ – punktu skaits attiecīgi tabulas pirmajā, otrajā un trešajā daļā; n – kopējais punktu skaits.

Pārveidojot šīs izteiksmes, iegūst vienādojumu sistēmu koeficientu a, b un c noteikšanai:

$$\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{l}x_i^2+b\sum x_i+lc &= \sum_{i=1}^{l}y_i\,, \\ a\sum_{j=l+1}^{m}x_j^2+b\sum_{j=l+1}^{m}x_j+(m-l)c &= \sum_{j=l+1}^{m}y_j\,, \\ a\sum_{k=m+1}^{n}x_k^2+b\sum_{k=m+1}^{n}x_k+(n-m)c &= \sum_{k=m+1}^{n}y_k\,. \end{aligned} \tag{104}$$

Vislabākos rezultātus var iegūt ar vizmazāko kvadrātu metodi, t.i., minimizējot summāro kvadrātisko novirzi:

$$F(a,b,c)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]^2=\min.$$

Izmantojot trīs argumentu funkcijas ekstrēma nosacījumus

$$\frac{\partial F(a,b,c)}{\partial a}=0,\ \frac{\partial F(a,b,c)}{\partial b}=0,\ \frac{\partial F(a,b,c)}{\partial c}=0,$$

iegūstam

$$\sum_{i=1}^{n}2\,[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)](-x_i^2)=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}2\,[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)](-x_i)=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}2\,[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)](-1)=0.$$

Pārveidojot šīs izteiksmes, iegūst vienādojumu sistēmu koeficientu a, b un c aprēķināšanai:

$$\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{n}x_i^4+b\sum_{i=1}^{n}x_i^3+c\sum_{i=1}^{n}x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n}x_i^2\,y_i\,, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^3+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2+c\sum_{i=1}^{n}x_i &= \sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i\,, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i+cn &= \sum_{i=1}^{n}y_i\,. \end{aligned} \tag{105}$$

Vispārīgā gadījumā sarežģītāku empīrisku sakarību var aproksimēt ar jebkuras pakāpes polinomu. Var arī izmantot jau iepriekš minēto analītisko izteiksmju (sk. (91) – (97)) dažādas kombinācijas. Jebkurā gadījumā izvēlētās formulas koeficientus var aprēķināt ar iepriekš aplūkotajām trim metodēm, risinot (atkarībā no formulas koeficientu skaita) atbilstošas kārtas vienādojumu sistēmu. Aproksimējot empīriskas sakarības ar dažādām vairāku koeficientu analītiskām izteiksmēm, galvenās grūtības sagādā vispiemērotākās formulas izvēle, jo atšķirībā no divu koeficientu formulām (91) – (97) šajā gadījumā formulas izvēlei neeksistē kaut kādi vispārīgi kritēriji un metodes. Sarežģītāku empīrisku sakarību aproksimācijai var izmantot arī t.s. gabaliem nelineāru aproksimāciju, kad argumentu visu doto vērtību apgabalu $\left[x_1 ; x_n\right]$ sadala vairākos apakšapgabalos un katrā no tiem aproksimācijai izmanto vienkāršākas analītiskas izteiksmes ar atbilstoši mazāku koeficientu skaitu.

5. Skaitliskā diferencēšana un skaitliskā integrēšana

5.1. Skaitliskās diferencēšanas uzdevuma nostādne

Risinot daudzus praktiskus elektrotehnikas uzdevumus, rodas nepieciešamība aprēķināt dažādas kārtas atvasinājumus funkcijai $y = f(x)$, kura uzdota tabulas veidā, grafiski vai ar sarežģītu analītisku izteiksmi. Šādos gadījumos tieši izmantot diferencēšanas metodes nav iespējams vai arī tas nav lietderīgi, un tāpēc jālieto skaitliskās diferencēšanas metodes.

Skaitliskās diferencēšanas uzdevumu var formulēt šādi: intervālā $[a;b]$ dota funkcija $y = f(x)$ ar savām $n+1$ vērtībām, t.i. $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2), \ldots,$ $y_n = f(x_n)$; jāatrod šīs funkcijas k-tās kārtas atvasinājums $f^{(k)}(x)$ jebkurā intervāla $[a;b]$ punktā.

Viens no paņēmieniem šāda uzdevuma risināšanā ir diferencējamās funkcijas aproksimēšana ar analītisku izteiksmi un pēc tam šīs izteiksmes atvasināšana. Vēlams, lai šī analītiskā izteiksme būtu iespējami vienkārša, viegli atvasināma, kā arī universāla tādā nozīmē, ka piemērojama neatkarīgi no diferencējamās funkcijas rakstura. Minētajiem nosacījumiem vislabāk atbilst n-tās pakāpes interpolācijas polinoms $P_n(x)$. Tādējādi, pieņemot $f(x) = P_n(x)$, funkcijas $f(x)$ atvasinājumu meklē kā šī polinoma atvasinājumu: $f'(x) = P_n'(x)$, $f''(x) = P_n''(x), \ldots,$ $f^{(k)}(x) = P_n^{(k)}(x)$. Ja funkcija $f(x)$ ir pietiekami gluda (tai ir ierobežots atvasinājumu skaits) un uzdota ar pietiekami lielu punktu skaitu, interpolācijas polinoma diferencēšana dod apmierinošu rezultātu. Vienlaikus jāatzīmē, ka praktiskos aprēķinos skaitliskā diferencēšana ir visai jutīga attiecībā pret kļūdām, kuras saistītas ar neprecīzu izejas informāciju, kā arī pret kļūdām, kuras rodas atmetot interpolācijas polinoma locekļus. Turklāt funkcijas $f(x)$ interpolēšanas augsta precizitāte nebūt negarantē atvasinājuma interpolācijas formulas augstu precizitāti un tāpēc skaitliskās diferencēšanas metodes parasti izmantojamas tikai ne sevišķi augstas kārtas atvasinājumiem. Ievērojot minētos apsvērumus, šeit sīkāk aplūkosim tikai aprēķina formulas pirmās un otrās kārtas atvasinājumiem, ar kuriem visbiežāk iznāk saskare elektrotehnikas uzdevumos. Vienlaikus atzīmēsim, ka jebkuras augstākas kārtas atvasinājumu var dabūt no zemākas kārtas atvasinājuma kā

$$f^{(k)}(x) = \frac{df^{(k-1)}(x)}{dx}.$$

5.2. Skaitliskās diferencēšanas formulas

Ja interpolācijas mezgli sadalīti vienmērīgi, t.i., $x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$ (kur $i = 0,1,2,\dots,n$), funkciju $f(x)$ var aizstāt ar Ņūtona interpolācijas polinomu (sk. (59)):

$$f(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \\ + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \dots, \qquad (106)$$

kur

$$t = \frac{x - x_0}{h} . \qquad (107)$$

Pārveidosim formulu (106), atverot iekavas labajā pusē:

$$f(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t^2 - t}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{t^3 - 3t^2 + 2t}{6}\Delta^3 y_0 + \\ + \frac{t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t}{24}\Delta^4 y_0 + \dots . \qquad (108)$$

Tā kā funkcija $f(x)$ ir dota parametriski ar vienādojumiem (106) un (107), tās atvasinājumu atrod kā

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{h}\cdot\frac{df(x)}{dt} . \qquad (109)$$

Diferencējot (106) un ievērojot (109), iegūstam

$$f'(x) = \frac{1}{h}(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3t^2 - 6t + 2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{2t^3 - 9t^2 + 11t - 3}{12}\Delta^4 y_0 + \dots) . \qquad (110)$$

Funkcijas $f(x)$ otro atvasinājumu iegūst kā

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{df'(x)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{h}\cdot\frac{df'(x)}{dt},$$

vai, ievērojot (107) un (110),

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}[\Delta^2 y_0 + (t-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6t^2 - 18t + 11}{12}\Delta^4 y_0 + \dots] . \qquad (111)$$

Ja atvasinājums jāatrod interpolācijas mezglos $x = x_i$, kur $t = 0$, formulas (110) un (11) attiecīgi vienkāršojas:

$$f'(x) = \frac{1}{h}(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \dots), \qquad (112)$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 + \dots). \qquad (113)$$

Skaitliskās diferencēšanas formulas (110) – (113) iegūtas no Ņūtona pirmās interpolācijas formulas un tāpēc tās izmantojamas, ja funkcijas atvasinājums jāaprēķina punktos, kas atrodas tabulas sākumā. Ja funkcijas atvasinājumu meklē punktos, kas atrodas tabulas beigās, izmanto Ņūtona otro interpolācijas formulu (sk. (61)):

$$f(x) = y_0 + t\Delta y_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_{-3} + \\ + \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\Delta^4 y_{-4} + \ldots . \qquad (114)$$

Tad iegūst šādas skaitliskās diferencēšanas formulas:

$$f'(x) = \frac{1}{h}(\Delta y_{-1} + \frac{2t+1}{2}\Delta^2 y_{-2} + \frac{3t^2+6t+2}{6}\Delta^3 y_{-3} + \\ + \frac{2t^3+9t^2+11t+3}{12}\Delta^4 y_{-4} + \ldots, \qquad (115)$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}[\Delta^2 y_{-2} + (t+1)\Delta^3 y_{-3} + \frac{6t^2+18t+11}{12}\Delta^4 y_{-4} + \ldots], \qquad (116)$$

vai interpolācijas mezglos $x = x_i$, kur $t = 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{h}(\Delta y_{-1} + \frac{\Delta^2 y_{-2}}{2} + \frac{\Delta^3 y_{-3}}{3} + \frac{\Delta^4 y_{-4}}{4} + \ldots), \qquad (117)$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_{-2} + \Delta^3 y_{-3} + \frac{11}{12}\Delta^4 y_{-4} + \ldots). \qquad (118)$$

5.3. Skaitliskās integrēšanas uzdevuma nostādne

Par intervālā $[a;b]$ definētas funkcijas $f(x)$ noteikto integrāli sauc skaitli

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (119)$$

kur a un b – attiecīgi integrāļa apakšējā un augšējā robeža; $F(x)$ – primitīvā funkcija.

Daudzos praktiskos gadījumos primitīvo funkciju $F(x)$ nav iespējams izteikt ar elementāru funkciju , kā arī zemintegrāļa funkcija $f(x)$ var būt uzdota tabulas veidā. Tāpēc rodas nepieciešamība noteikto integrāli aprēķināt ar tuvinātām metodēm, kuras nosacīti var iedalīt divās grupās – analītiskās un skaitliskās. Analītiskās metodes pamatojas uz to, ka zemintegrāļa funkciju aproksimē ar tuvinātu analītisku izteiksmi, kuru pēc tam integrē, izmantojot formulu (119). Skaitliskās metodes noteikto integrāli ļauj aprēķināt tieši, izmantojot zemintegrāļa izteiksmes vērtības fiksētos punktos, t.s., mezglos. Šeit aplūkosim tikai skaitliskās metodes, no kurām praksē visbiežāk izmanto taisnstūru, trapeču, parabolu un Čebiševa metodi.

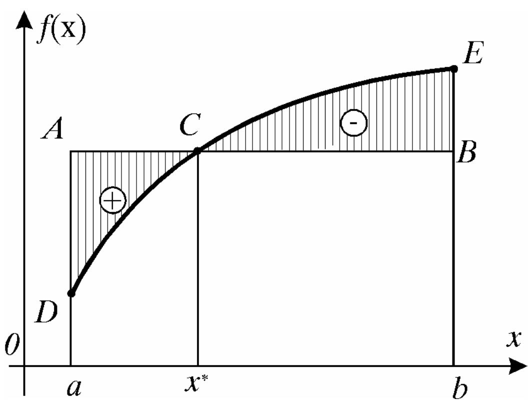
5.4. Taisnstūru metode

Noteiktā integrāļa vienkāršākā aprēķināšnas metode ir taisnstūru metode, kura pamatojas uz noteiktā integrāļa definīciju:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i \ ,$$

kur $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$ – integrālā summa, kas atbilst apgabala $[a;b]$ sadalīšanai intervālos Δx_i un kaut kādai mezglu $x_0, x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}$ izvēlei; $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ($i = 0,1,2,\ldots,n-1$).

Ģeometriskā interpretācijā noteiktā integrāļa $I = \int_a^b f(x)dx$ aprēķināšana reducējas uz tāda līklīnijas trapecas laukuma aprēķināšanu, kuru ierobežo funkcijas $f(x)$ grafiks, abscisu ass un taisnes $x = a$ un $x = b$ (8. zīm.). Aizstāsim līklīnijas trapecas laukumu $DEba$ ar taisnstūra $ABba$ laukumu tā, lai figūru DAC un CEB laukumi būtu aptuveni vienādi.



8. zīm.

Ievērojot to, ka taisnstūra $ABba$ augstums ir vienāds ar funkcijas $f(x)$ vērtību punktā x^*, var uzrakstīt šādu tuvinātu izteiksmi:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(x^*) \ .$$

Lai paaugstinātu skaitliskās integrēšanas precizitāti, nogriezni ab sadala vairākās daļās un integrāļa tuvinātu vērtību katrai no šīm daļām aprēķina kā laukumu līklīnijas trapecai, kuras pamatne ir $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ($i = 0,1,2,\ldots,n-1$), bet ekvivalentā taisnstūra augstums – $f(x_i)$, t.i., funkcijas vērtība punktā x_i^*, kuru izvēlas, minimizējot integrēšanas kļūdu. Šajā gadījumā par integrāļa tuvinātu vērtību intervālā $[a;b]$ var pieņemt integrālo summu

$$\int_a^b f(x)dx \approx f(x_0^*)\Delta x_0 + f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \cdots + f(x_{n-1}^*)\Delta x_{n-1} \ .$$

No praktiskā viedokļa intervālu $[a;b]$ lietderīgi dalīt vienādās daļās, bet punktu x_i^* savietot ar intervāla kreiso ($f(x_i^*) = f(x_i)$) vai labo ($f(x_i^*) = f(x_{i+1})$) galapunktu. Ja punktu x_i^* savieto ar intervāla Δx_i kreiso galapunktu, tad integrāļa tuvināta vērtība ģeometriski ir vienāda ar 9. zīm.a iekrāsotās figūras laukumu un šajā gadījumā iegūst kreiso taisnstūru formulu:

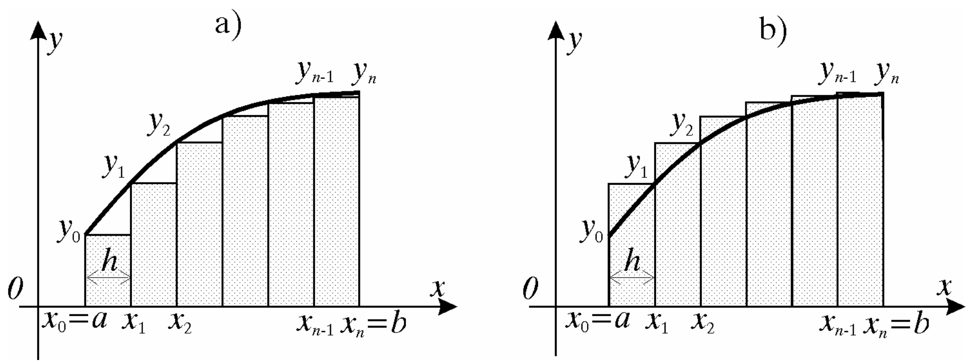
$$I_{kr} = \int_a^b f(x)dx = h(y_0 + y_1 + y_2 + \dots y_{n-1}) = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i \ , \qquad (121)$$

kur integrēšanas solis

$$h = \Delta x_i = \frac{b-a}{n} \ . \qquad (122)$$

Savietojot punktu x_i^* ar intervāla Δx_i labo galapunktu, integrāļa tuvināta vērtība ir vienāda ar ar 9. zīm.b iekrāsotās figūras laukumu un integrāļa aprēķinam iegūst labo taisnstūru formulu:

$$I_{lab} = \int_a^b f(x)dx \approx h(y_1 + y_2 + \dots + y_n) = h\sum_{i=1}^{n} y_i \ . \qquad (123)$$



9. zīm.

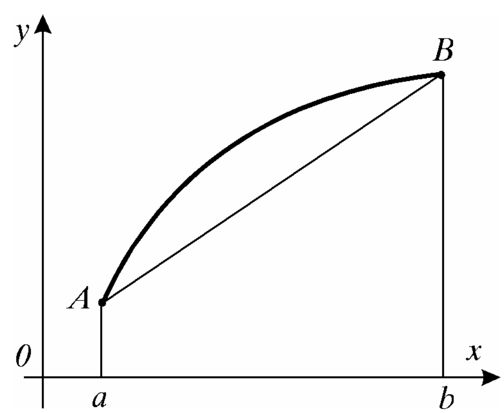
5.5. Trapeču metode

Aprēķinot noteikto integrāli ar trapeču metodi, intervālā $[a;b]$ funkcijas $f(x)$ grafika loku *AB* aizstāj ar hordu (10. zīm.). Par integrāļa tuvinātu vērtību pieņem trapeces *ABba* laukumu:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \ . \qquad (124)$$

Integrāļa aprēķināšanas precizitāti var paaugstināt, ja intervālu $[a;b]$ sadala vairākos nogriežņos Δx_i un formulu (122) piemēro katram no šiem nogriežņiem:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\Delta x_i \ .$$



10. zīm.

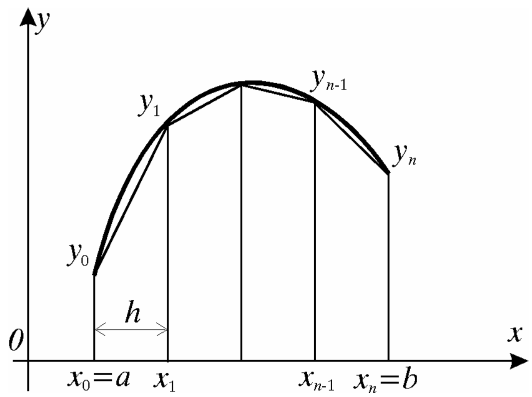
Lai vienkāršotu aprēķinu, intervālu $[a;b]$ lietderīgi dalīt vienādās daļās un tad jebkuram i-jam nogrieznim Δx_i (11. zīm.)

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx h\frac{y_i + y_{i+1}}{2},$$

bet visam intervālam $[a;b]$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1}\frac{y_i + y_{i+1}}{2},$$

kur h – sk. izteiksmi (122).



11. zīm.

Tā kā zem summas zīmes i vērtībām no $i=1$ līdz $i=n-1$ lielumi y_i ieiet divas reizes, tad iepriekšējās izteiksmes vietā iegūstam formulu

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y\right), \qquad (125)$$

ko sauc par trapeču formulu. Šo formulu dažreiz lieto arī nedaudz citādā formā:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i). \qquad (126)$$

5.6. Parabolu metode (Simpsona metode)

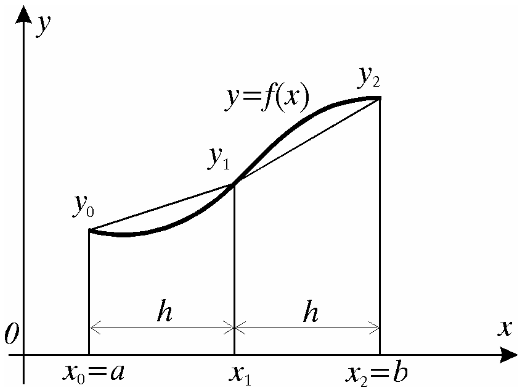
Skaitliskās integrēšanas precizitāti var būtiski paaugstināt, ja zemintegrāļa funkciju $f(x)$ intervālā $[a;b]$ aizstāj ar kvadrātisku funkciju, turklāt tādu, kura mezglos $x_0 = a$, x_1, $x_2 = b$ pieņem attiecīgi vērtības $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ (12. zīm.). Aizstāsim šo funkciju ar otrās pakāpes Ņūtona interpolācijas polinomu

$$f(x) = P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1).$$

Tad, integrējot un ievērojot, ka $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h$ un $x_2 - x_0 = 2h$,

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx = 2hy_0 + \frac{\Delta y_0}{h}\cdot\frac{4h^2}{2} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}\cdot\frac{8h^3}{3} - \frac{\Delta^2 y}{2h^2}\cdot h\frac{4h^2}{2} =$$

$$= 2hy_0 + 2h\Delta y_0 + \frac{h}{3}\Delta^2 y_0 \ .$$



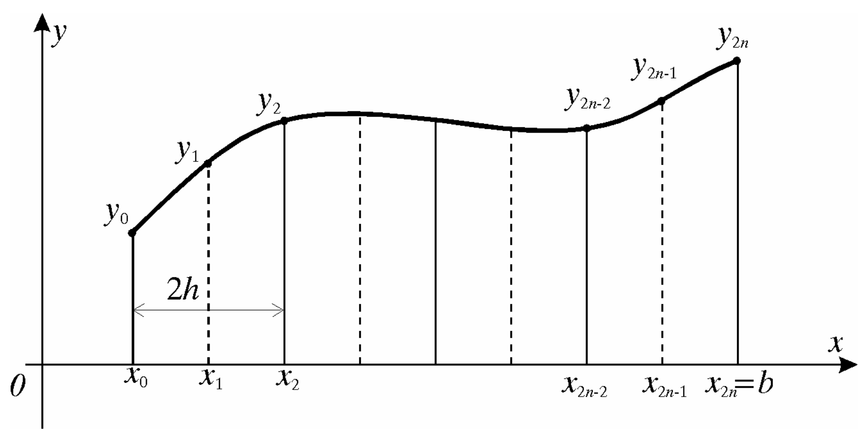
12. zīm.

Izsakot galīgās diferences Δy_0 un $\Delta^2 y_0$ ar funkcijas vērtībām y_0, y_1, y_2, iegūstam skaitliskās integrēšanas formulu

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2), \qquad (127)$$

ko sauc par Simpsona formulu.

Lai paaugstinātu integrēšanas precizitāti, intervālu $[a;b]$ sadala $2n$ vienādās daļās. Tad iegūst mezglus ar koordinātām x_0, x_1, x_2,…, x_{2i-2}, x_{2i-1}, x_{2i},…, x_{2n-2}, x_{n-1}, x_{2n} (13. zīm.).



13. zīm.

Piemērojot formulu (127) katram no intervāliem ar garumu $2h$, iegūstam

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Integrāļa skaitlisko vērtību visam intervālam $[a;b]$ atrod kā atsevišķo integrāļu summu:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + \dots + y_{2n-2})] =$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + y_n + 4\sum_{i=1}^{n} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{n} y_{2i}). \tag{128}$$

Salīdzinot aplūkotās trīs metodes, var atzīmēt, ka, palielinot n, visas integrēšanas formulas kļūst precīzākas. Ja n ir viens un tas pats, tad trapeču formula ir precīzāka nekā taisnstūru formula, bet Simpsona formula – precīzāka nekā trapeču formula.

5.7. Čebiševa metode

Saskaņā ar Čebiševa metodi noteiktā integrāļa aprērķināšanai par pamatu ņem šādu formulu:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=1}^{n} C_i f(x_i). \tag{129}$$

Šeit koeficienti C_i ir t.s. kvadratūras koeficienti ar fiksētām vērtībām, bet koordinātas x_i aprēķināmas pirms integrāļa izskaitļošanas. Lai vienkāršotu aprēķinus, lietderīgi pieņemt $C_1 = C_2 = \dots = C_n$.

Aplūkosim vispirms gadījumu, kad integrēšanas robežas ir –1 un +1. Tad no formulas (129)

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2C_n(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)). \tag{130}$$

Koeficientu C_n un interpolācijas mezglu koordinātas atradīsim izejot no nosacījuma, ka vienādība (130) ir precīza tad, ja $f(x)$ ir n-tās pakāpes polinoms

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n. \tag{131}$$

Ievietojot šo polinomu izteiksmes (130) kreisajā pusē un integrējot, iegūstam

$$\int_{-1}^{1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n) = 2(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \dots).$$

Izteiksmes (130) labajā pusē ievietosim polinoma (131) vērtības mezglos $x_1,\ x_2,\dots,\ x_n$:

$$
\begin{aligned}
f(x_1) &= a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + \dots + a_nx_1^n,\\
f(x_2) &= a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 + \dots + a_nx_2^n,\\
f(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 + \dots + a_nx_3^n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
f(x_n) &= a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + a_3x_n^3 + \dots + a_nx_n^n.
\end{aligned}
$$

Tad vienādojuma (130) vietā var uzrakstīt

$$
\begin{aligned}
&2(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \dots) = 2C_n[na_0 + a_1(x_1 + x_2 + \dots + x_n) +\\
&+ a_2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + a_3(x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3) + \dots + a_n(x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n)].
\end{aligned}
\tag{132}
$$

Iegūtā vienādība ir spēkā jebkurām $a_0,\ a_1,\dots,\ a_n$ vērtībām. Tāpēc, salīdzinot koeficientus šīs vienādības kreisajā un labajā pusē, iegūstam $2a_0 = 2C_nna_0$, no kurienes

$$
C_n = \frac{1}{n},
\tag{133}
$$

kā arī iegūstam šādus vienādojumus:

$$
\begin{aligned}
0 &= 2C_na_1(x_1 + x_2 + \dots + x_n),\\
\frac{2}{3}a_2 &= 2C_na_2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2),\\
0 &= 2C_na_3(x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3),\\
\frac{2}{5}a_4 &= 2C_na_4(x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{n\left[1-(-1)^{n+1}\right]}{2(n+1)}a_n &= 2C_na_n(x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n)\ .
\end{aligned}
$$

Vienkāršojot šīs izteiksmes , iegūstam vienādojumu sistēmu

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \dots + x_n &= 0,\\
x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 &= \frac{n}{3},\\
x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 &= 0,\\
x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 &= \frac{n}{5},\\
&\dots\dots\dots\dots\\
x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n &= \frac{n\left[1-(-1)^{n+1}\right]}{2(n+1)}.
\end{aligned}
\tag{134}
$$

Atrisinot vienādojumu sistēmu dažādām n vērtībām, var atrast mezglu koordinātas x_1, $x_2,\dots,\ x_n$, kuru vērtības dotas 5. tabulā.

Mezglu skaits n	Mezglu koordinātas x_i
1	$x_1 = 0$
2	$-x_1 = x_2 = 0{,}7735$
3	$-x_1 = x_3 = 0{,}70711$; $x_2 = 0$
4	$-x_1 = x_4 = 0{,}79465$; $-x_2 = x_3 = 0{,}18759$
5	$-x_1 = x_5 = 0{,}83250$; $-x_2 = x_4 = 0{,}37454$; $x_3 = 0$
6	$-x_1 = x_6 = 0{,}86625$; $-x_2 = x_5 = 0{,}42252$; $-x_3 = x_4 = 0{,}26664$

Ievērojot (133), no (130) iegūstam noteiktā integrāļa aprēķināšanas Čebiševa formulu:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{2}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i). \tag{135}$$

Vispārīgā gadījumā, kad integrēšanas robežas nav -1 un $+1$, bet a un b, Čebiševa formula ir šāda:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{b-a}{n}(f(z_1) + f(z_2) + \ldots + f(z_n)) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(z_i), \tag{136}$$

kur

$$z_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x_i, \ (i = 1,2,\ldots,n)$$

un x_i atbilst 5. tabulā dotajām vērtībām.

6. Parasto diferenciālvienādojumu tuvinātas risināšanas metodes

6.1. Vispārīgi norādījumi

Par diferenciālvienādojumu sauc vienādojumu, kurā nezināmā funkcija ieiet zem atvasinājuma zīmes, piem.,

$$\frac{dy}{dx} = 3y + 2,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = t - 1,$$

$$yy' = 3x^2 + 1,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = a.$$

Ja nezināmā funkcija, ko satur diferenciālvienādojums, ir viena neatkarīga mainīgā funkcija, tad šādu vienādojumu sauc par parasto diferenciālvienādojumu (pirmie trīs vienādojumi), bet ja diferenciālvienādojumā ieiet funkcija, kas atkarīga no diviem vai vairākiem mainīgajiem – par parciālo diferenciālvienādojumu (pēdējie divi vienādojumi). Par diferenciālvienādojuma kārtu sauc nezināmās funkcijas atvasinājuma augstāko kārtu. Tā, piem., pirmais un trešais vienādojums ir pirmās kārtas, bet otrais, ceturtais un piektais – otrās kārtas diferenciālvienādojumi.

Parastais n-tās kārtas diferencuālvienādojums vispārīgā gadījumā var saturēt neatkarīgo mainīgo, nezināmo funkciju un tās atvasinājumus līdz n-tajai kārtai ieskaitot, un to var uzrakstīt šādā formā:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 . \qquad (137)$$

Šajā vienādojumā x ir neatkarīgais mainīgais, y – nezināmā funkcija, $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ – šīs funkcijas atvasinājumi.

Par diferenciālvienādojuma atrisinājumu jeb integrāli sauc jebkuru diferencējamu funkciju $y = f(x)$, kura apmierina šo vienādojumu, t.i., kura, ievietota vienādojumā (137), pārvērš šo vienādojumu par identitāti.

Diferenciālvienādojuma atrisināšanas rezultātā iegūtās funkcijas grafiku sauc par šī vienādojuma integrāllīkni.

Diferenciālvienādojuma atrisinājumu, kas satur patvaļīgās kostantes, kuru skaits ir vienāds ar šī vienādojuma kārtu, sauc par diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu. Vispārīgā atrisinājuma ģeometriskā interpretācija ir šī vienādojuma integrāllīkņu saime.

Par diferenciālvienādojuma partikulāro atrisinājumu sauc atrisinājumu, kas iegūts no vispārīgā atrisinājuma, kurā patvaļīgajām konstantēm ir noteiktas skaitliskas vērtības.

Diferenciālvienādojuma atrisināšanas (integrēšanas) uzdevumu var formulēt šādi: atrast vienādojuma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

atrisinājumu, kas apmierina papildnosacījumus, kad atbilstoši neatkarīgā mainīgā $x = x_0$ vērtībai funkcija un tās atvasinājumi (līdz $n-1$ kārtai ieskaitot) pieņem vērtības

$$y_0 = y(x_0),\ y'_0 = y'(x_0),\ y''_0 = y''(x_0), \ldots,\ y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0) . \qquad (138)$$

Nosacījumus (138) sauc par sākumnosacījumiem un tie ir atkarīgi no aplūkojamā fizikālā precesa īpatnībām.

Lai atrisinātu pirmās kārtas diferenciālvienādojumu

$$y' = f(x, y) ,$$

ir jāuzdod viens sākumnosacījums, t.i., $y_0 = y(x_0)$, otrās kārtas diferenciālvienādojumu

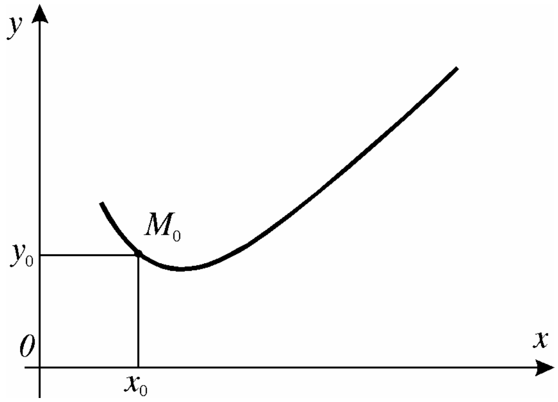
$$y'' = f(x, y, y') -$$

divi sākumnosacījumi, t.i., $y_0 = y(x_0)$ un $y'_0 = y'(x_0)$, trešās kārtas diferenciālvienādojumu

$$y''' = f(x, y, y', y'') -$$

trīs sākumnosacījumi, t.i., $y_0 = y(x_0)$, $y'_0 = y'(x_0)$, $y''_0 = y''(x_0)$ utt.

Var atzīmēt, ka pirmās kārtas diferenciālvienādojuma atrisinājuma ģeometriskā interpretācija ir integrāllīkne, kas iet car punktu M_0 ar koordinātām $x = x_0$, $y = y_0$ (14. zīm.).



14. zīm.

Diferenciālvienādojumu precīzās atrisināšanas metodes daudzos gadījumos nav izmantojamas un tāpēc lielu nozīmi iegūst tuvinātās risināšanas metodes. Atkarībā no atrisinājuma formas šīs metodes var iedalīt divās grupās:

1) analītiskās metodes, ar kurām atrisinājumu iegūst tuvinātas analītiskas izteiksmes veidā;
2) skaitliskās metodes, ar kurām atrisinājumu iegūst tabulas veidā.

Šajā nodaļā no pirmās grupas aplūkosim iterāciju metodi un risināšanas metodi ar pakāpes rindu palīdzību, bet no otrās grupas – Eilera metodi un Runges−Kutas metodi.

6.2. Iterāciju metode (Pikāra metode)

Pieņemsim, ka dots vienādojums

$$y' = f(x, y) \tag{139}$$

un jāatrod šī vienādojuma atrisinājums, kas apmierina sākumnosacījumu

$$x = x_0 ,\ y(x_0) = y_0 . \tag{140}$$

Integrējot vienādojuma abas puses no x_0 līdz x, iegūstam

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx ,$$

jeb

$$y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx ,$$

no kurienes

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx . \tag{141}$$

Tādējādi diferenciālvienādojums (139) tiek aizstāts ar integrālvienādojumu, kurā nezināmā funkcija ieiet zem integrāļa zīmes. Integrālvienādojums (141) apmierina diferenciālvienādojumu (139) un sākumnosacījumu (140), par ko var pārliecināties, ja (140) ievieto vienādojumā (141):

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(x, y)dx = y_0 \ .$$

Vienādojuma atrisinājuma pirmo tuvinājumu iegūst, ja vienādojuma (141) labajā pusē ievieto $y = y_0$. Tad

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx \, .$$

Pēc tam vienādojuma (141) labajā pusē ievietojot atrasto y_1 vērtību, iegūst atrisinājuma otro tuvinājumu:

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)dx \, .$$

Šādu procesu secīgi atkārtojot, var iegūt atrisinājuma jebkuru *n*-to tuvinājumu kā

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx \, . \qquad (142)$$

Tādējādi iegūstam funkciju virkni $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x), \ldots,$ $y_n(x)$. Ja funkcija $f(x, y)$ un tās parciālais atvasinājums $f'_y(x, y)$ dotajā intervālā ir nepārtraukti, tad virkne $y_i(x)$ konverģē un šīs virknes robeža ir $y(x)$, t.i., diferenciālvienādojuma (139) atrisinājums, kas turklāt apmierina sākumnosacījumu (140).

6.3. Diferenciālvienādojumu risināšana ar pakāpes rindu palīdzību

Pieņemsim, ka dots *n*-tās kārtas diferenciālvienādojums

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{)n-1)}) \qquad (143)$$

ar sakumnosacījumiem

$$x = x_0 \, , \; y(x_0) = y_0 \, , \; y'(x_0) = y'_0 \, , \; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \, . \qquad (144)$$

Šī vienādojuma labā puse ir analītiska funkcija punktā $M_0(x_0; y_0; y'_0; \ldots; y_0^{(n-1)})$. Meklēsim vienādojuma atrisinājumu punkta x_0 tuvumā Teilora rindas veidā:

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0) + \frac{y''_0}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y_0^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n + \ldots, \qquad (145)$$

kur $|x - x_0| < h$, bet h – pietiekami mazs lielums.

Lai atrastu rindas (145) koeficientus, vienādojumu (143) diferencē pēc x nepieciešamo skaitu reižu un izmanto nosacījumus (144).

Ja $x_0 = 0$, tad (145) vietā iegūst vienkāršāku izteiksmi:

$$y = y_0 + y_0' x + \frac{y_0''}{2!} x^2 + \ldots + \frac{y_0^{(n)}}{n!} x^n + \ldots \; . \qquad (146)$$

Diferenciālvienādojumu risināšanu ar pakāpes rindu palīdzību lietderīgi izmantot it īpaši tad, ja interesē funkcijas izmaiņas neliels apgabals sākumvērtību x_0 un y_0 tuvumā.

6.4. Eilera metode

Eilera metode pieder pie diferenciālvienādojumu skaitliskās risināšanas metodēm.

Atrisināt diferenciālvienādojumu $y' = f(x, y)$ ar skaitlisko metodi nozīmē dotajai argumentu kopai $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ un dotajai vērtībai y_0 atrast atbilstošās funkcijas vērtības $y_1, y_2, \ldots, y_n$, kas apmierina doto diferenciālvienādojumu un sākumnosacījumu $y(x_0) = y_0$. Tādējādi skaitliskās metodes ļauj atrast funkcijas $y(x)$ tabulu, nenosakot pašu funkciju tās analītiskajā formā.

Eilera metode ir visvienkāršākā no diferenciālvienādojumu risināšanas metodēm. Tā nav sevišķi precīza un tāpēc lietojama galvenokārt orientējošiem aprēķiniem. Vienlaikus jāatzīmē, ka idejas, uz kurām balstīta Eilera metode, ir pamatā citām – precīzākām diferenciālvienādojumu skaitliskās integrēšanas metodēm.

Pieņemsim, ka dots pirmās kārtas diferenciālvienādojums

$$y' = f(x, y) \qquad (147)$$

ar sākumnosacījumu

$$x = x_0, \; y(x_0) = y_0 \qquad (148)$$

un jāatrod šī vienādojuma atrisinājums intervālā $[a; b]$.

Sadalot intervālu $[a; b]$ n vienādās daļās, iegūst argumentu virkni $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, kur $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$), $h = (b - a)/n$ – integrēšanas solis.

Izvēlēsimies kaut kādu i-to intervālu $[x_i; x_{i+1}]$ un nointegrēsim šajā intervālā vienādojumu (147):

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx = y(x)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = y(x_{i+1}) - y(x_i) = y_{i+1} - y_i ,$$

no kurienes var atrast

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx . \qquad (149)$$

Ja pēdējā integrālī zemintegrāļa funkcijas vērtību intervālā $[x_i; x_{i+1}]$ pieņem par nemainīgu un vienādu ar tās vērtību intervāla sākumā, t.i., punktā $x = x_i$, tad iegūstam

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i, y_i) dx = f(x_i, y_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx = f(x_i, y_i) \cdot x\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i) = y_i' h ,$$

jeb, ievērojot (149),

$$y_{i+1} = y_i + y_i'h\,. \tag{150}$$

Apzīmējot

$$\Delta y_i = y_i'h\,, \tag{151}$$

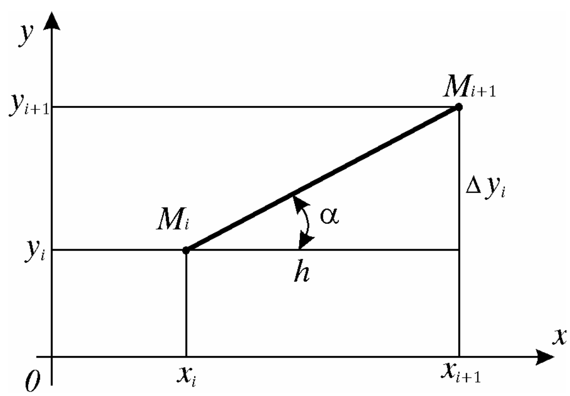
izteiksmes (150) vietā var uzrakstīt

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i\,. \tag{152}$$

Veicot šādas darbības visiem intervāliem, iegūst diferenciālvienādojuma atrisinājuma tabulu visam intervālam $[a;b]$.

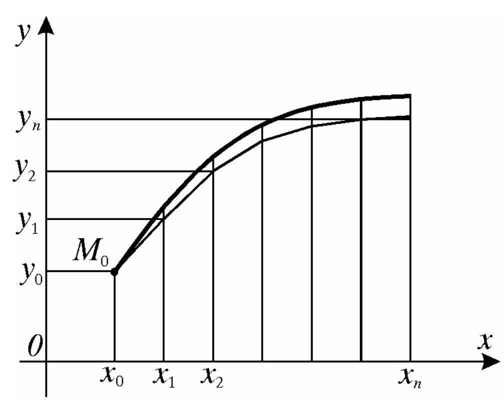
Vienādība (152) ģeometriskajā interpretācijā nozīmē, ka intervālā $[x_i\,;x_{i+1}]$ integrāllīkne tuvināti tiek aizstāta ar taisnes nogriezni, kurš iziet no punkta $M_i(x_i\,,y_i)$ un turpinās līdz punktam $M_{i+1}(x_{i+1}\,,y_{i+1})$ (15. zīm.), turklāt

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y_i}{h} \approx y_i'\,.$$



15. zīm.

Tādējādi, kā meklētās integrāllīknes tuvinājumu iegūstam lauztu līniju ar virsotnēm punktos $M_0(x_0\,,y_0)$, $M_1(x_1 y_1)$,…, $M_n(x_n y_n)$ (16. zīm.).



16. zīm.

Algoritmu diferenciālvienādojuma risināšanai ar Eilera metodi uzskatāmi var parādīt tabulas veidā (sk. 6. tabulu). Šāda tipa tabula ir ērta, ja aprēķinam izmanto, piem., EXCEL programmu.

6. tabula

i	x_i	y_i	$y'_i = f(x_i, y_i)$	$\Delta y_i = hy'_i$
0	$x_0 = a$	y_0	$y'_0 = f(x_0, y_0)$	$\Delta y_0 = hy'_0$
1	$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$	$y'_1 = f(x_1, y_1)$	$\Delta y_1 = hy'_1$
2	$x_2 = x_0 + 2h$	$y_2 = y_1 + \Delta y_1$	$y'_2 = f(x_2, y_2)$	$\Delta y_2 = hy'_2$
. . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
n	$x_n = x_0 + nh$	$y_n = y_{n-1} + \Delta y_{n-1}$		

Praksē izmanto arī dažādas Eilera metodes modifikācijas, ar kurām var iegūt diferenciālvienādojuma precīzāku atrisinājumu. Aplūkosim šeit t.s. modificēto Eilera metodi, kuras būtība ir šāda: vispirms aprēķina palīglielumu – meklējamās funkcijas vērtību punktā $x_{i+1/2} = x_i + h/2$

$$y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} y'_i, \tag{153}$$

tad vienādojuma (147) labās puses vērtību tajā pašā punktā

$$y'_{i+1/2} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) \tag{154}$$

un pēc tam atrod

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \tag{155}$$

jeb

$$y_{i+1} = y_i + hy'_{i+1/2}. \tag{156}$$

Šīs metodes algoritms ilustrēts 7. tabulā.

7. tabula

i	x_i	y_i	$y'_i = f(x_i, y_i)$	$\frac{h}{2} y'_i$	$x_{i+1/2} = x_i + h/2$	$y_{i+1/2}$ (153)	$y'_{i+1/2}$ (154)	$\Delta y_i = hy'_{i+1/2}$
0	x_0	y_0	y'_0	$\frac{h}{2} y'_0$	$x_{1/2}$	$y_{1/2}$	$y'_{1/2}$	Δy_0
1	x_1	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$	y'_1	$\frac{h}{2} y'_1$	$x_{3/2}$	$y_{3/2}$	$y'_{3/2}$	Δy_1
2	x_2	$y_2 = y_1 + \Delta y_1$	y'_2	$\frac{h}{2} y'_2$	$x_{5/2}$	$y_{5/2}$	$y'_{5/2}$	Δy_2
. . .	. . .	. . . .	. . .	. . .	. . . .	. . .	. . .	. . .
n	x_n	$y_n = y_{n-1} + \Delta y_{n-1}$	y'_n					

6.5. Runges–Kutas metode

Runges–Kutas metode ir viena no paaugstinātas precizitātes metodēm. Šai metodei ir daudz kopīga ar Eilera metodi.

Pieņemsim, ka dots pirmās kārtas diferenciālvienādojums

$$y' = f(x, y) \tag{157}$$

ar sākumnosacījumu

$$x = x_0\,,\;\; y(x_0) = y_0 \tag{158}$$

un jāatrod šī vienādojuma atrisinājums intervālā $[a;b]$.

Sadalot intervālu $[a;b]$ n vienādās daļās, iegūst argumentu virkni $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, kur $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0,1,2,\ldots,n$), $h = (b-a)/n$ - integrēšanas solis.

Runges–Kutas metode, tāpat kā Eilera metode, paredz y_{i+1} vērtības aprēķināt ar formulu

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i\,. \tag{159}$$

Šajā formulā funkcijas pieaugumu Δy_i i-tajā intervālā aprēķina kā

$$\Delta y_i = \frac{h}{6}(k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i})\,, \tag{160}$$

kur

$$\begin{aligned} k_{1i} &= f(x_i, y_i)\,,\\ k_{2i} &= f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + h\frac{k_{1i}}{2})\,,\\ k_{3i} &= f(x_i + h, y_i + h\frac{k_{2i}}{2})\,,\\ k_{4i} &= f(x_i + h, y_i + hk_{3i})\,. \end{aligned} \tag{161}$$

Runges–Kutas metodes algoritms ilustrēts 8. tabulā.

8. tabula

i	x	y	$y' = f(x,y)$	$hk = hf(x,y)$	Δy
1	2	3	4	5	6
0	x_0 $x_0 + h/2$ $x_0 + h/2$ $x_0 + h$	y_0 $y_0 + hk_{10}/2$ $y_0 + hk_{20}/2$ $y_0 + hk_{30}$	$f(x_0, y_0)$ $f(x_0 + h/2, y_0 + hk_{10}/2)$ $f(x_0 + h/2, y_0 + hk_{20}/2)$ $f(x_0 + h, y_0 + hk_{30})$	hk_{10} hk_{20} hk_{30} hk_{40}	hk_{10} $2hk_{20}$ $2hk_{30}$ hk_{40}
					$\frac{1}{6}\sum = \Delta y_0$
1	x_1 $x_1 + h/2$ $x_1 + h/2$ $x_1 + h$	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$ $y_1 + hk_{11}/2$ $y_1 + hk_{21}/2$ $y_1 + hk_{31}$	$f(x_1, y_1)$ $f(x_1 + h/2, y_1 + hk_{11}/2)$ $f(x_1 + h/2, y_1 + hk_{21}/2)$ $f(x_1 + h, y_1 + hk_{31})$	hk_{11} hk_{21} hk_{31} hk_{41}	hk_{11} $2hk_{21}$ $2hk_{31}$ hk_{41}
					$\frac{1}{6}\sum = \Delta y_1$

1	2	3	4	5	6
2	x_2 $x_2+h/2$ $x_2+h/2$ x_2+h	$y_2=y_1+\Delta y_1$ $y_2+h\,k_{12}/2$ $y_2+h\,k_{22}/2$ y_2+hk_{32}	$f(x_2,y_2)$ $f(x_2+h/2,\,y_2+h\,k_{12}/2)$ $f(x_2+h/2,\,y_2+h\,k_{22}/2)$ $f(x_2+h,\,y_2+hk_{32})$	hk_{12} hk_{22} hk_{32} hk_{42}	hk_{12} $2hk_{22}$ $2hk_{32}$ hk_{42}
					$\frac{1}{6}\sum=\Delta y_2$
. . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . . . .
n	x_n	$y_n=y_{n-1}+\Delta y_{n-1}$			

6.6. Parasto diferenciālvienādojumu robežproblēma

Parasto diferenciālvienādojumu robežproblēmas risināšanu aplūkosim otrās kārtas diferenciālvienādojumam

$$F(x,y,y',y'')=0. \qquad (162)$$

Robežproblēmas atrisināšanas uzdevumu var formulēt šādi: atrast funkciju $y(x)$, kas intervālā $[a;b]$ apmierina vienādojumu (162), bet intervāla galos – robežnosacījumus

$$\varphi_1[y(a),y'(a)]=0,$$
$$\varphi_2[y(b),y'(b)=0. \qquad (163)$$

Var aplūkot robežnosacījumu vairākus raksturīgus gadījumus.

Pirmā veida robežnosacījumi ir tad, ja intervāla galapunktos ($x=a$ un $x=b$) uzdotas meklējamās funkcijas $y(x)$ vērtības

$$y(a)=A,$$
$$y(b)=B$$

un tad vienādojuma atrisinājuma ģeometriskā interpretācija ir integrāllīkne, kas iet caur dotajiem punktiem $M(a,A)$ un $N(b,B)$ (17. zīm.a).

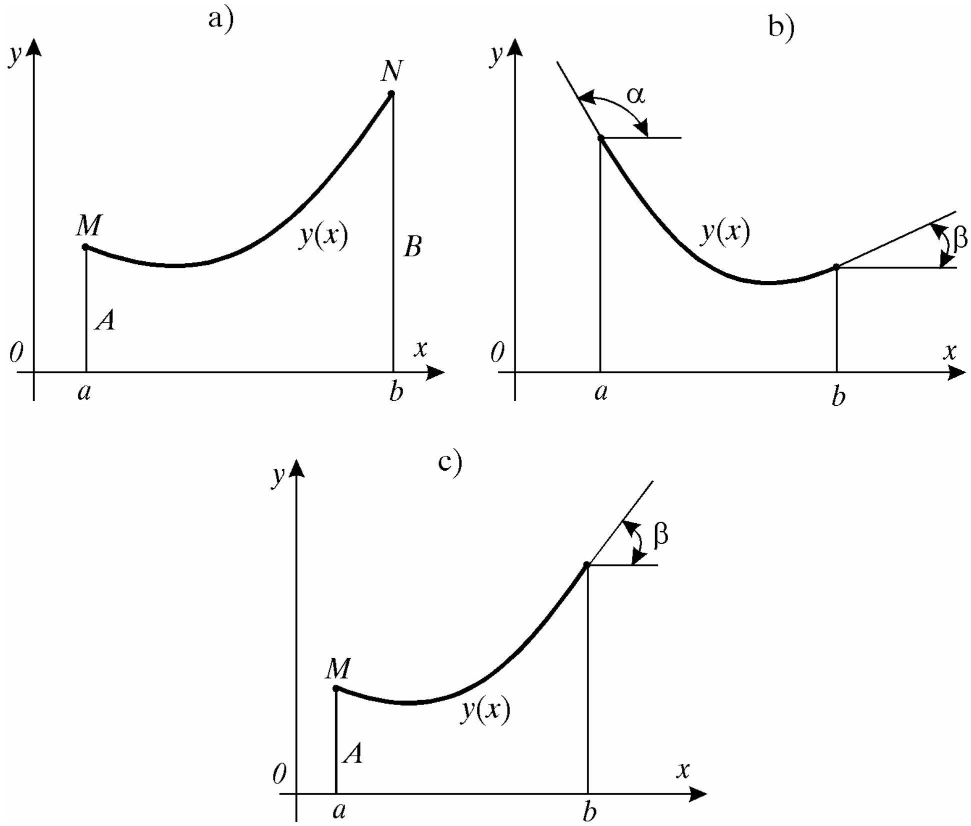
Otrā veida robežnosacījumi ir, ja intervāla galapunktos uzdotas meklējamās funkcijas $y(x)$ atvasinājuma vērtības

$$y'(a)=A_1,$$
$$y'(b)=B_1.$$

Šajā gadījumā atrisinājuma ģeometriskā interpretācija ir integrāllīkne, kas taisnes $x=a$ un $x=b$ krusto leņķos $\alpha=\operatorname{arctg}A_1$ un $\beta=\operatorname{arctg}B_1$ (17. zīm.b).

Jaukta veida robežnosacījumu gadījumā intervāla vienā galapunktā uzdota funkcijas vērtība, bet otrā galapunktā – tās atvasinājuma vērtība (17. zīm.c)

$$y(a)=A,$$
$$y'(b)=B_1.$$



17. zīm.

Vispārīgā gadījumā jebkurā no intervāla galapunktiem var būt uzdota pirmo un otro robežnosacījumu lineāra kombinācija.

Ja diferenciālvienādojums un robežnosacījumi ir lineāri, tad šādu uzdevumu sauc par lineāru uzdevumu. Šajā gadījumā diferenciālvienādojumu (162) un robežnosacījumus (163) var uzrakstīt šādi:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)\,, \tag{164}$$

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A\,, \tag{165}$$
$$\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B,$$

kur $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – zināmas funkcijas; $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, A, B$ – uzdoti nemainīgi lielumi.

6.7. Otrās kārtas lineāru diferenciālvienādojumu risināšana ar galīgo diferenču metodi

Pieņemsim, ka dots diferenciālvienādojums (164) ar robežnosacījumiem (165) un jāatrod šī vienādojuma atrisinājums intervālā $[a;b]$.

Sadalīsim šo intervālu n vienādās daļās. Tad iegūsim argumentu virkni $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, kur $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0,1,2,\ldots,n$), $h = (b-a)/n$ – integrēšanas solis. Zināmo funkciju $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ vērtības mezglos x_i apzīmēsim ar $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, bet funkcijas $y(x)$ un tā atvasinājumu $y'(x)$ un $y''(x)$ tuvinātās vērtības – attiecīgi ar $y_i = y(x_{i)})$, $y_i' = y'(x_i)$, $y_i'' = y''(x_i)$. Funkcijas atvasinājumus $y'(x_i)$ un $y''(x_i)$ intervāla iekšējos punktos $i = 1,2,\ldots,n-1$ vienādojumā (164) izteiksim ar galīgajām diferencēm

$$y_i' = \frac{\Delta y}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \tag{166}$$

$$y_i'' = \frac{\Delta^2 y_i}{h^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \tag{167}$$

bet funkcijas pirmos atvasinājumus intervāla galapunktos $i = 0$ un $i = n$ – ar

$$y_0' = \frac{y_1 - y_0}{h}, \tag{168}$$

$$y_n' = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}. \tag{169}$$

Tad, ievietojot (166) – (169) vienādojumos (164) un (165), iegūst vienādojumu sistēmu

$$\begin{aligned} &\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + q_i y_i = f_i \quad (i = 1,2,\ldots,n-1), \\ &\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, \\ &\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{aligned} \tag{170}$$

Tādējādi diferenciālvienādojuma vietā ir iegūta $n+1$ algebrisku vienādojumu sistēma ar $n+1$ nezināmajiem – funkcijas tuvinātām vērtībām integrēšanas mezglos. Var atzīmēt, ka galvenais faktors, kas nosaka risināšanas precizitāti ir solis *h*, turklāt kļūda Δ ir apgriezti proporcionāla h^2.

7. Uzdevumu risināšanas piemēri

1. uzdevums. Lineāru vienādojumu sistēma

Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$0{,}3x_1 + 0{,}9x_2 - 1{,}3x_3 = 0{,}4, \tag{A}$$

$$1{,}5x_1 - 0{,}7x_2 + 1{,}1x_3 = -0{,}4, \tag{B}$$

$$2{,}5x_1 + 5{,}8x_2 - 0{,}5x_3 = 3{,}5 \tag{C}$$

ar: a) matricu metodi un b) iterāciju metodi ar precizitāti $\Delta = 0{,}05$.

a) Matricu metode.

Vienādojumu sistēma matricu formā (sk. izteiksmi (2))

$$\begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}9 & -1{,}3 \\ 1{,}5 & -0{,}7 & 1{,}1 \\ 2{,}5 & 5{,}8 & -0{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}4 \\ 3{,}5 \end{bmatrix}.$$

Aprēķinām sistēmas matricas A determinantu:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0,3 & 0,9 & -1,3 \\ 1,5 & -0,7 & 1,1 \\ 2,5 & 5,8 & -0,5 \end{vmatrix} = -12,244$$

un šīs matricas adjunktus (sk. (5))

$A_{11} = -6,005$; $A_{12} = 3,5$; $A_{13} = 10,45$; $A_{21} = -7,09$; $A_{22} = 3,1$; $A_{23} = 0,51$;
$A_{31} = 0,08$; $A_{32} = -2,28$; $A_{33} = -1,56$.

Sastādām matricu A' (sk. (6))

$$A' = \begin{bmatrix} -6,005 & 3,5 & 10,45 \\ -7,09 & 3,1 & 0,51 \\ 0,08 & -2,28 & -1,56 \end{bmatrix},$$

atrodam transponēto matricu (sk. (7))

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -6,005 & -7,09 & 0,08 \\ 3,5 & 3,1 & -2,28 \\ 10,45 & 0,51 & -1,56 \end{bmatrix}$$

un pēc tam inverso matricu (sk. (8))

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,49 & 0,579 & -0,006 \\ -0,286 & -0,253 & 0,186 \\ -0,853 & -0,042 & 0,127 \end{bmatrix}.$$

Izmantojot formulu (4), iegūstam

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0,49 & 0,579 & -0,006 \\ -0,286 & -0,253 & 0,186 \\ -0,853 & -0,042 & 0,127 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,4 \\ -0,4 \\ 3,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,057 \\ 0,638 \\ 0,12 \end{bmatrix}.$$

Tātad $x_1 = -0,057$; $x_2 = 0,638$; $x_3 = 0,12$.

Uzdevuma risinājums ar EXCEL programmu ilustrēts pielikumā dotajā izdrukā.

b) Iterāciju metode.

Tā kā dotajai vienādojumu sistēmai neizpildās konverģences nosacījumi (16), šī sistēma ir jāpārveido iterāciju metodei piemērojamā formā. Šim nolūkam no dotās sistēmas izdalām tos vienādojumus, kuros kaut kāds no koeficientiem ir lielāks par pārējo koeficientu summu. Katru no šiem izdalītajiem vienādojumiem ierakstām jaunās sistēmas tajā rindiņā, kurā šis lielākais koeficients būtu diagonālais koeficients. Vienādojumā (A) koeficients pie x_3 pēc moduļa ir lielāks par pārējo koeficientu moduļu summu, tāpēc šo vienādojumu var pieņemt par jaunās sistēmas trešo vienādojumu:

$$0{,}3x_1 + 0{,}9x_2 - 1{,}3x_3 = 0{,}4\,. \qquad \text{(III)}$$

Vienādojumā (C) koeficients pie x_2 pēc moduļa ir lielāks par pārējo koeficientu moduļu summu, tāpēc šis vienādojums ir jaunās sistēmas otrais vienādojums:

$$2{,}5x_1 + 5{,}8x_2 - 1{,}3x_3 = 3{,}5\,. \qquad \text{(II)}$$

Par jaunās sistēmas pirmo vienādojumu pieņemsim vienādojumu, kurš iegūts kā vienādojumu (A) u (B) lineāra kombinācija (A) + 2(B):

$$\begin{array}{rl}
0{,}3x_1 + 0{,}9x_2 - 1{,}3x_3 = 0{,}4 & \text{(A)} \\
3{,}0x_1 - 1{,}4\,x_2 + 2{,}2x_3 = -0{,}8 & \text{2(B)} \\
\hline
3{,}3x_1 - 0{,}5\,x_2 + 0{,}9x_3 = -0{,}4\,. & \text{(I)}
\end{array}$$

Tādējādi, izdarot ekvivalentos pārveidojumus, esam ieguvuši vienādojumu sistēmu

$$\begin{array}{rl}
3{,}3x_1 - 0{,}5x_2 + 0{,}9x_3 = -0{,}4\,, & \text{(I)} \\
2{,}5x_1 + 5{,}8x_2 - 0{,}5x_3 = 3{,}5\,, & \text{(II)} \\
0{,}3x_1 + 0{,}9x_2 - 1{,}3x_3 = 0{,}4\,. & \text{(III)}
\end{array}$$

Pārveidojot šo sistēmu normalizētā formā (9), iegūstam

$$\begin{aligned}
x_1 &= -0{,}121 + 0{,}151x_2 - 0{,}273x_3\,, \\
x_2 &= 0{,}604 - 0{,}431x_1 + 0{,}086x_3\,, \\
x_3 &= -0{,}308 + 0{,}231x_1 + 0{,}692x_2\,,
\end{aligned}$$

jeb, uzrakstot to matricu formā (sk. (11))

$$X = \beta + \alpha X\,,$$

kur

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \ \alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}151 & -0{,}273 \\ -0{,}431 & 0 & 0{,}086 \\ 0{,}231 & 0{,}692 & 0 \end{bmatrix}, \ \beta = \begin{bmatrix} -0{,}121 \\ 0{,}604 \\ -0{,}308 \end{bmatrix}.$$

Par atrisinājuma 0-to tuvinājumu pieņemsim

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}121 \\ 0{,}604 \\ -0{,}308 \end{bmatrix}.$$

Pirmo tuvinājumu atrod kā (sk. formulu (12)

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}121 \\ 0{,}604 \\ -0{,}308 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0{,}151 & -0{,}273 \\ -0{,}431 & 0 & 0{,}086 \\ 0{,}231 & 0{,}692 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0{,}121 \\ 0{,}604 \\ -0{,}308 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}054 \\ 0{,}630 \\ 0{,}082 \end{bmatrix}.$$

Pārbaudot pēc formulas (13) risinājuma precizitāti

$$|0{,}054-(-0{,}121)| = 0{,}175 > 0{,}05\,,$$
$$|0{,}63-0{,}604| = 0{,}026 < 0{,}05\,,$$
$$|0{,}082-(-0{,}308)| = 0{,}390 > 0{,}05\,,$$

konstatējam, ka iterāciju process ir jāturpina.

Otro tuvinājumu iegūstam kā

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}121 \\ 0{,}604 \\ -0{,}308 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0{,}151 & -0{,}273 \\ -0{,}431 & 0 & 0{,}086 \\ 0{,}231 & 0{,}692 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}054 \\ 0{,}630 \\ 0{,}082 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}048 \\ 0{,}588 \\ 0{,}140 \end{bmatrix}.$$

Tā kā

$$|-0{,}048-0{,}054| = 0{,}102 > 0{,}05\,,$$
$$|0{,}588-0{,}630| = 0{,}042 < 0{,}05\,,$$
$$|0{,}140-0{,}082| = 0{,}058 > 0{,}05\,,$$

izdarām trešo tuvinājumu:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}121 \\ 0{,}604 \\ -0{,}308 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0{,}151 & -0{,}273 \\ -0{,}431 & 0 & 0{,}086 \\ 0{,}231 & 0{,}692 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0{,}048 \\ 0{,}588 \\ 0{,}140 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}07 \\ 0{,}637 \\ 0{,}088 \end{bmatrix}.$$

Tā kā

$$|-0{,}07-(-0{,}048)| = 0{,}022 < 0{,}05\,,$$
$$|0{,}637-0{,}588| = 0{,}049 < 0{,}05\,,$$
$$|0{,}088-0{,}140| = 0{,}052 > 0{,}05\,,$$

izdarām ceturto tuvinājumu

$$\begin{bmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}121 \\ 0{,}604 \\ -0{,}308 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0{,}151 & -0{,}273 \\ -0{,}431 & 0 & 0{,}086 \\ 0{,}231 & 0{,}692 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0{,}07 \\ 0{,}637 \\ 0{,}088 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}049 \\ 0{,}641 \\ 0{,}116 \end{bmatrix},$$

kuru var uzskatīt par vienādojumu sistēmas tuvinātu atrisinājumu ar precizitāti $\Delta = 0{,}05$, jo

$$|-0{,}049-(-0{,}07)| = 0{,}021 < 0{,}05,$$
$$|0{,}641-0{,}637| = 0{,}004 < 0{,}05,$$
$$|0{,}116-0{,}088| = 0{,}028 < 0{,}05.$$

2. uzdevums. Nelineāri vienādojumi

Atrisināt ar precizitāti $\Delta = 0{,}01$ nelineāru vienādojumu

$$4^x - 4x - 2 = 0$$

izmantojot: a) bisekciju metodi; b)hordu metodi; c) Ņūtona metodi d) iterāciju metodi.

Analizējot funkciju

$$f(x) = 4^x - 4x - 2$$

vai konstruējot šīs funkcijas grafiku, var konstatēt, ka vienādojumam ir divas saknes, kuras atrodas intervālos $-1 < x_1 < 0$ un $0 < x_2 < 1$. Precizēsim saknes mazāko vērtību, t.i., vērtību, kas atrodas intervālā $[-1{,}0; 0]$.

a) <u>Bisekciju metode</u>.

Uzdevuma risināšanas gaita ilustrēta 9. tabulā.

9. tabula

n	a_n	b_n	$c_n = x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$	$f(a_n)$	$f(c_n)$	$f(a_n)\cdot f(c_n)$	$\lvert b_n - a_n\rvert$
0	-1,0	0	-0,5	2,25	0,5	1,125	1>0,01
1	-0,5	0	-0,25	0,5	-0,293	-0,146	0,5>0,01
2	-0,5	-0,25	-0,375	0,5	0,095	0,047	0,25>0,01
3	-0,375	-0,25	-0,312	0,095	-0,103	-0,01	0,125>0,01
4	-0,375	-0,312	-0,343	0,095	-0,006	-0,0006	0,063>0,01
5	-0,375	-0,343	-0,356	0,095	0,044	0,004	0,032>0,01
6	-0,359	-0,343	-0,351	0,044	0,019	0,0008	0,016>0,01
7	-0,351	-0,343	-0,347				0,008<0,01

No tabulas redzams, ka, noapaļojot līdz simtdaļām, saknes tuvinātā vērtība $\tilde{x} = -0{,}35$ un vienādojuma atrisinājumu var pierakstīt kā

$$x = 0{,}35 \pm 0{,}01.$$

Uzdevuma risinājums ar EXCEL programmu ilustrēts pielikumā dotajā izdrukā.

b) <u>Hordu metode</u>.

Saskaņā ar hordu metodi kārtējo $n+1$ tuvinājumu aprēķina ar formulu (26) vai (27) atkarībā no $f(a)\cdot f''(a)$ zīmes.

Atradīsim vispirms funkcijas $f(x) = 4^x - 4x - 2$ otro atvasinājumu:

$$f''(x) = 4^x (\ln 4)^2.$$

Tā kā punktā $x = a = -1 \quad f(-1) = 4^{-1} - 4(-1) - 2 = 2{,}25$; $f''(-1) = 4^{-1} \cdot (\ln 4)^2 = 0{,}48$ un $f(-1) \cdot f''(-1) = 1{,}08 > 0$, tad aprēķinam jāizmanto formula (27), par 0-to tuvinājumu izvēloties vērtību $x_0 = b = 0$. Uzdevuma risināšanas gaita ilustrēta 10. tabulā.

10. tabula

n	x_n	$f(x_n)$	$x_n - a$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
0	0	-1	1	
1	-0,308	-0,116	0,692	0,308>0,01
2	-0,342	-0,0103	0,658	0,034>0,01
3	-0,345			0,003<0,01

No tabulas redzams, ka $|x_3 - x_2| < 0{,}01$, tāpēc, noapaļojot x_3 vērtību līdz simtdaļām, iegūstam

$$x_3 = 0{,}35 \pm 0{,}01.$$

Uzdevuma risinājums ar EXCEL programmu ilustrēts pielikumā dotajā izdrukā.

c) Ņūtona metode.

Tā kā $f(a) \cdot f''(a) = f(-1) \cdot f''(-1) > 0$ (sk. iepriekš hordu metodi), tad pirmā tuvinājuma aprēķinam izmantojama formula (33). Lai izmantotu šo formulu, vispirms atrodam funkcijas $f(x)$ pirmo atvasinājumu:

$$f'(x) = 4^x \ln 4 - 4.$$

Risinājuma gaita ilustrēta 11. tabulā.

11. tabula

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
0	-1	2,25	-3,653	
1	-0,384	0,1237	-3,186	0,616>0,01
2	-0,345	0,0009	-3,141	0,039>0,01
3	-0,345		-3,141	0<0,01

Tātad vienādojuma atrisinājums, kas iegūts pēc trešā tuvinājuma un attiecīgi noapaļots līdz simtdaļām ir

$$x = 0{,}35 \pm 0{,}01.$$

Uzdevuma risinājums ar EXCEL programmu ilustrēts pielikumā dotajā izdrukā.

d) Iterāciju metode.

Lai izmantotu iterāciju metodi, risināmais vienādojums $f(x) = 0$ jāpārveido ekvivalentā vienādojumā $x = \varphi(x)$. Var būt vairāki šādas pārveidošanas varianti, no kuriem aplūkosim dažus.

Pieskaitot vienādojuma $4^x - 4x - 2 = 0$ abām pusēm x, iegūstam vienādojumu

$$x = 4^x - 3x - 2, \qquad \text{(A)}$$

kur

$$\varphi(x) = 4^x - 3x - 2.$$

Atrodam funkcijas $\varphi(x)$ pirmo atvasinājumu

$$\varphi'(x) = 4^x \ln 4 - 3$$

un pārbaudām konverģences nosacījumu (39) punktos $x = a = -1$ un $x = b = 0$:

$$|\varphi'(-1)| = |4^{-1} \ln 4 - 3| = 2{,}653 > 1,$$
$$|\varphi'(0)| = |4^{0} \ln 4 - 3| = 1{,}614 > 1.$$

Tā kā konverģences nosacījums neizpildās, jāizmanto cita funkcijas $\varphi(x)$ forma. Izsakot no vienādojuma $4^x - 4x - 2 = 0$ otrā locekļa *x*, iegūstam

$$x = 0{,}25 \cdot 4^x - 0{,}5, \qquad \text{(B)}$$

kur

$$\varphi(x) = 0{,}25 \cdot 4^x - 0{,}5.$$

Pārbaudot funkcijas $\varphi(x)$ pirmā atvasinājuma vērtību punktos $x = a = -1$ un $x = b = 0$, iegūstam

$$|\varphi'(-1)| = |0{,}25 \cdot 4^{-1} \cdot \ln 4| = 0{,}0866 < 1,$$
$$|\varphi'(0) = |0{,}25 \cdot 4^{0} \cdot \ln 4| = 0{,}3466 < 1|.$$

Tātad vienādojums (B) apmierina konverģences nosacījumu un tāpēc to var izmantot iterāciju metodes realizēšanai. Par sākuma tuvinājumu x_0 var pieņemt jebkuru *x* vērtību intervālā $[-1{,}0; 0]$, piem., $x_0 = (a+b)/2 = (-1+0)/2 = -0{,}5$. Tad iegūstam rezultātus, kuri doti 12. tabulā.

12. tabula

n	x_n	$\varphi(x_n) = 0{,}25 \cdot 4^{x_n} - 0{,}5$	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	-0,500	-0,375	
1	-0,375	-0,351	0,024>0,01
2	-0,351	-0,346	0,005<0,01

Tātad vienādojuma atrisinājums, kas iegūts otrajā tuvinājumā un noapaļots līdz simtdaļām ir

$$x = 0{,}35 \pm 0{,}01.$$

Uzdevuma risinājums ar EXCEL programmu ilustrēts pielikumā dotajā izdrukā.

3. uzdevums. Paraboliskā interpolācija

Aproksimēt ar trešās pakāpes polinomu $P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ tabulas veidā (13. tabula) uzdotu funkciju.

13. tabula

i	x_i	y_i
0	1,2	3,54
1	1,6	7,42
2	2,1	15,85
3	2,4	23,24

Uzrakstām vienādojumu sistēmu koeficientu a_0, a_1, a_2, a_3 noteikšanai (sk. (43)):

$$\begin{aligned}
&a_0 + 1{,}2a_1 + 1{,}44a_2 + 1{,}728a_3 = 3{,}54\,,\\
&a_0 + 1{,}6a_1 + 2{,}56a_2 + 4{,}096a_3 = 7{,}42\,,\\
&a_0 + 2{,}1a_1 + 4{,}41a_2 + 9{,}261a_3 = 15{,}85\,,\\
&a_0 + 2{,}4a_1 + 5{,}76a_2 + 13{,}82a_3 = 23{,}24\,.
\end{aligned}$$

Atrisinot šo sistēmu ar jebkuru no metodēm, iegūstam $a_0 = 1{,}12$; $a_1 = -0{,}88$; $a_2 = 0{,}62$; $a_3 = 1{,}5$ un tabulas veidā uzdotas funkcijas aproksimācijas polinoms ir

$$P_3(x) = 1{,}12 - 0{,}88x + 0{,}62x^2 + 1{,}5x^3\,.$$

Šo polinomu var uzrakstīt arī kā Lagranža polinomu (sk. (44))

$$L_3(x) = 3{,}54\frac{(x-1{,}6)(x-2{,}1)(x=2{,}4)}{(1{,}2-1{,}6)(1{,}2-2{,}1)(1{,}2-2{,}4)} + 7{,}42\frac{(x-1{,}2)(x-2{,}1)(x-2{,}4)}{(1{,}6-1{,}2)(1{,}6-2{,}1)(1{,}6-2{,}4)} +$$

$$+15{,}85\frac{(x-1{,}2)(x-1{,}6)(x-2{,}4)}{(2{,}1-1{,}2)(2{,}1-1{,}6)(2{,}1-2{,}4)} + 23{,}24\frac{(x-1{,}2)(x-1{,}6)(x-2{,}1)}{(2{,}4-1{,}2)(2{,}4-1{,}6)(2{,}4-2{,}1}\,,$$

jeb, pārveidojot

$$L_3(x) = -8{,}19(x-1{,}6)(x-2{,}1)(x-2{,}4) + 46{,}37(x-1{,}2)(x-2{,}1)(x-2{,}4) +$$

$$-117{,}4(x-1{,}2)(x-1{,}6)(x-2{,}4) + 80{,}69(x-1{,}2)(x-1{,}6)(x-2{,}1)\,.$$

4. uzdevums. Ņūtona interpolācijas polinomi

Atrast tabulas veidā (14. tabula) uzdotas funkcijas vērtības, kas atbilst argumentu vērtībām $x = 0{,}38$ un $x = 1{,}52$.

14. tabula

i	x_i	y_i
0	0,3	0,952
1	0,5	1,022
2	0,7	1,322
3	0,9	1,924
4	1,1	2,899
5	1,3	4,319
6	1,5	6,258
7	1,7	8,785

Sastādām galīgo diferenču tabulu (sk. 15. tabulu).

15. tabula

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0,3	0,952				
		0,070			
0,5	1,022		0,230		
		0,300		0,072	
0,7	1,322		0,302		-0,001
		0,602		0,071	
0,9	1,924		0,373		0,001
		0,975		0,072	
1,1	2,899		0,445		0,002
		1,420		0,074	
1,3	4,319		0,519		-0,005
		1,939		0,069	
1,5	6,258		0,588		
		2,527			
1,7	8,785				

Tā kā funkcija uzdota ar trīs zīmēm aiz komata, tad pēdējā zīme ir noapaļota un tāpēc aprēķinos aprobežojamies ar trešās kārtas galīgajām diferencēm.

Aprēķinot argumenta vērtībai $x = 0{,}38$, kas atrodas tabulas sākumā atbilstošo funkcijas vērtību, izmantojam Ņūtona pirmo interpolācijas formulu (59) un attiecīgi lejupejošās galīgās diferences. Par x_0 vērtību lietderīgi izvēlēties tuvāko vērtību, t.i., $x_0 = 0{,}3$. Ievērojot, ka solis $h = x_{i+1} - x_i = 0{,}2$, aprēķinām parametru t

$$t = \frac{0{,}38 - 0{,}3}{0{,}2} = 0{,}4$$

un saskaņā ar formulu (59) iegūstam

$$P_3(0{,}38) = 0{,}952 + 0{,}4 \cdot 0{,}07 + \frac{0{,}4(0{,}4-1)}{2}0{,}230 + \frac{0{,}4(0{,}4-1)(0{,}4-2)}{6}0{,}072 = 0{,}957$$

.

Argumenta vērtībai x = 1,52, kas atrodas tabulas beigās, atbilstošo funkcijas vērtību aprēķinām, izmantojot Ņūtona otro interpolācijas formulu un augšupejošās galīgās diferences. Par x_0 vērtību pieņemam $x_0 = 1{,}5$. Tad

$$t = \frac{1{,}52 - 1{,}5}{0{,}2} = 0{,}1$$

un saskaņā ar (61)

$$P_3(1{,}52) = 6{,}258 + 0{,}1 \cdot 1{,}939 + \frac{0{,}1(0{,}1+1)}{2} 0{,}519 + \frac{0{,}1(0{,}1+1)(0{,}1+2)}{6} 0{,}074 = 6{,}483 .$$

5. uzdevums. Trigonometriskā interpolācija un skaitliskā harmoniku analīze

Aproksimēt tabulas veidā (16. tabula) uzdotu funkciju ar trigonometrisko polinomu, ievērojot harmonikas līdz $n = 3$. Atrast aproksimētās funkcijas atvasinājumu un integrāli.

16. tabula

k	$\omega t_k = x_k$	y_k
0	0^0	3,1
1	30^0	2,3
2	60^0	2,2
3	90^0	0,9
4	120^0	0,2
5	150^0	-0,2
6	180^0	-0,9
7	210^0	-0,7
8	240^0	-1,8
9	270^0	-1,1
10	300^0	0,2
11	330^0	1,8
12	360^0	3,1

Trigonometriskais polinoms saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem ir šāds:

$$Q_3(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{3} (a_n \cos nx + b \sin nx) .$$

Šī polinoma koeficientus a_n un b_n $(n = 0,1,2,3)$ var aprēķināt ar formulām (73) un (74), kur dotajā gadījumā $m = 12$. Aprēķina rezultāti doti 17. tabulā, no kuras iegūtas šādas koeficientu vērtības: $a_0 = 1{,}0$; $a_1 = 1{,}72$; $a_2 = 0{,}6$; $a_3 = 0$; $b_1 = 0{,}994$; $b_2 = 0$; $b_3 = -0{,}167$.

17.a tabula

k	$x_k = \omega t_k$	y_k	$\cos x_k$	$y_k \times$ $\times \cos x_k$	$\sin x_k$	$y_k \times$ $\times \sin x_k$
0	0^0	3,1	1	3,1	0	0
1	30^0	2,3	0,866	1,992	0,5	1,15
2	60^0	2,2	0,5	1,1	0,866	1,905
3	90^0	0,9	0	0	1	0,9
4	120^0	0,2	-0,5	-0,1	0,866	0,173
5	150^0	-0,2	-0,866	0,173	0,5	-0,1
6	180^0	-0,9	-1	0,9	0	0
7	210^0	-0,7	-0,866	0,606	-0,5	0,35
8	240^0	-1,8	-0,5	0,9	-0,866	1,559
9	270^0	-1,1	0	0	-1	1,1
10	300^0	0,2	0,5	0,1	-0,866	-0,173
11	330^0	1,8	0,866	1,559	-0,5	-0,9
		$\sum = 6,0$		$\sum = 10,33$		$\sum = 5,964$

17.b tabula

k	$x_k = \omega t_k$	y_k	$\cos 2x_k$	$y_k \times$ $\times \cos 2x_k$	$\sin 2x_k$	$y_k \times$ $\times \sin 2x_k$
0	0^0	3,1	1	3,1	0	0
1	30^0	2,3	0,5	1,15	0,866	1,992
2	60^0	2,2	-0,5	-1,1	0,866	1,905
3	90^0	0,9	-1	-0,9	0	0
4	120^0	0,2	-0,5	-0,1	-0,866	-0,173
5	150^0	-0,2	0,5	-0,1	-0,866	0,173
6	180^0	-0,9	1	-0,9	0	0
7	210^0	-0,7	0,5	-0,35	0,866	-0,606
8	240^0	-1,8	-0,5	0,9	0,866	-1,559
9	270^0	-1,1	-1	1,1	0	0
10	300^0	0,2	-0,5	-0,1	-0,866	-0,173
11	330^0	1,8	0,5	0,9	-0,866	-1,559
				$\sum$=3,6		$\sum$=0

17.c tabula

k	$x_k = \omega t_k$	y_k	$\cos 3x_k$	$y_k \times \times \cos 3x_k$	$\sin 3x_k$	$y_k \times \times \sin 3x_k$
0	0^0	3,1	1	3,1	0	0
1	30^0	2,3	0	0	1	2,3
2	60^0	2,2	-1	-2,2	0	0
3	90^0	0,9	0	0	-1	-0,9
4	120^0	0,2	1	0,2	0	0
5	150^0	-0,2	0	0	1	-0,2
6	180^0	-0,9	-1	0,9	0	0
7	210^0	-0,7	0	0	-1	0,7
8	240^0	-1,8	1	-1,8	0	0
9	270^0	-1,1	0	0	1	-1,1
10	300^0	0,2	-1	-0,2	0	0
11	330^0	1,8	0	0	-1	-1,8
				$\sum$=0		$\sum = = -1,0$

Tādējādi uzdotā funkcija ir aproksimēta ar rindu – trešās kārtas trigonometrisko polinomu

$$Q_3(x) = 0,5 + 1,72\cos x + 0,994\sin x + 0,6\cos 2x - 0,167\sin 3x\,.$$

Atvasinot šo rindu, iegūstam jaunu rindu, kuras koeficientus aprēķina ar formulu (78):

$$Q_3'(x) = 0,994\cos x - 1,72\sin x - 0,5\cos 3x - 1,2\sin 2x\,.$$

Integrējot rindu, iegūstam jaunu rindu, kuras koeficientus aprēķina ar formulu (81):

$$\int Q_3(x)dx = 0,5x - 0,994\cos x + 1,72\sin x - 0,0556\cos 3x + 0,3\sin 2x\,.$$

6. uzdevums. Datu matemātiskā apstrāde

Tabulas veidā (18. tabula) uzdotas funkcijas aproksimācijai izvēlēties vispiemērotāko

18. tabula

i	x_i	y_i
1	0,1	3,51
2	0,2	3,03
3	0,3	2,67
4	0,4	2,38
5	0,5	2,15
6	0,6	1,96
7	0,7	1,80
8	0,8	1,67
9	0,9	1,55
10	1,0	1,45

formulu (sk. (91) – (97)) un noteikt šīs formulas koeficientus ar:
a) izvēlēto punktu metodi; b) vidējo noviržu metodi; c) vismazāko kvadrātu metodi.

Lai atrastu vispiemērotāko empīrisko formulu, no tabulas izvēlamies divas argumenta vērtības $x_1 = 0{,}1$ un $x_n = x_{10} = 1{,}0$ un aprēķinām

$$x_{ar} = \frac{0{,}1 + 1{,}0}{2} = 0{,}55\,,$$
$$x_{ģeom} = \sqrt{0{,}1 \cdot 1{,}0} = 0{,}316\,,$$
$$x_{har} = \frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}0}{0{,}1 + 1{,}0} = 0{,}182\,.$$

Atbilstoši šīm vērtībām no tabulas (vai funkcijas grafika) atrodam $y_1^* = 2{,}06$; $y_2^* = 2{,}62$; $y_3^* = 3{,}12$.

No tabulā dotajām $y_1 = 3{,}51$ un $y_n = y_{10} = 1{,}45$ vērtībām aprēķinām

$$y_{ar} = \frac{3{,}51 + 1{,}45}{2} = 2{,}48\,,$$
$$y_{ģeom} = \sqrt{3{,}51 \cdot 1{,}45} = 2{,}26\,,$$
$$y_{har} = \frac{2 \cdot 3{,}51 \cdot 1{,}45}{3{,}51 + 1{,}45} = 2{,}05\,.$$

Aprēķinām novirzes ε:

$\varepsilon_1 = |2{,}06 - 2{,}48| = 0{,}42$; $\varepsilon_2 = |2{,}06 - 2{,}24| = 0{,}20$; $\varepsilon_3 = |2{,}06 - 2{,}05| = 0{,}01$;

$\varepsilon_4 = |2{,}62 - 2{,}48| = 0{,}14$; $\varepsilon_5 = |2{,}62 - 2{,}24| = 0{,}36$; $\varepsilon_6 = |3{,}12 - 2{,}48| = 0{,}64$;

$\varepsilon_7 = |3{,}12 - 2{,}05| = 1{,}07$.

Tā kā $\varepsilon_{\min} = \varepsilon_3$, tad aproksimācijai izvēlāmies daļveida racionālo funkciju:

$$y = \frac{1}{ax + b}\,.$$

Tālāk nosakām šīs formulas koeficientus a un b ar trīs metodēm.

a) <u>Izvēlēto punktu metode</u>.

Izvēlamies no 18. tabulas punktus $x_1 = 0{,}2$; $y_1 = 3{,}03$; $x_2 = 0{,}9$; $y_2 = 1{,}55$. Tad var uzrakstīt vienādojumu sistēmu

$$\frac{1}{0{,}2a + b} = 3{,}03\,,$$
$$\frac{1}{0{,}9a + b} = 1{,}55\,,$$

kuru atrisinot, iegūstam $a = 0{,}45$; $b = 0{,}24$ un formulu

$$y = \frac{1}{0{,}45x + 0{,}24}\,.$$

b) Vidējo noviržu metode.

Izmantojot šo metodi koeficientu a un b noteikšanai tiešā veidā, iegūst nelineāru vienādojumu sistēmu, kuras atrisināšana rada zināmas grūtības. Tāpēc šajā gadījumā lietderīgi izmantot koordinātu transformāciju, aizstājot nelineāro sakarību ar lineāru sakarību $Y = AX + B$ saskaņā ar 4. tabulas trešo rindiņu. Transformētās Y_i un X_i vērtības dotas 19. tabulā.

19. tabula

i	$X_i = x_i$	$\sum X_i$	$Y_i = 1/y_i$	$\sum Y_i$
1	0,1		0,285	
2	0,2		0,330	
3	0,3		0,375	
4	0,4		0,420	
5	0,5		0,465	
6	0,6	2,1	0,510	2,385
7	0,7		0,556	
8	0,8		0,600	
9	0,9		0,645	
10	1,0	3,4	0,690	2,491

Lineārās sakarības $Y = AX + B$ koeficientu noteikšanai 19. tabulas datus sadalām divās grupās, turklāt tā, lai šajās grupās Y_i summas būtu aptuveni vienādas. No tabulas, izmantojot formulas (89), var iegūt vienādojumu sistēmu

$$2{,}1A + 6B = 2{,}385,$$
$$3{,}4A + 4B = 2{,}491,$$

kuras atrisinājums ir $A = 0{,}45$; $B = 0{,}24$. Izmantojot 4. tabulu, iegūstam $a = 0{,}45$; $b = 0{,}24$ un formulu

$$y = \frac{1}{0{,}45x + 0{,}24}.$$

c) Vismazāko kvadrātu metode.

Arī lietojot vismazāko kvadrātu metodi, izmantojama koordinātu transformācija. Koeficientus A un B aprēķina ar formulām (90), izmantojot 20. tabulas datus.

No tabulas saskaņā ar (90) iegūstam vienādojumu sistēmu

$$3{,}85A + 5{,}5B = 0{,}3053,$$
$$5{,}5A + 10B = 4{,}876,$$

kuras atrisinājums ir $A = 0{,}44$; $B = 0{,}24$. Izmantojot 4. tabulu, iegūstam $a = 0{,}24$; $b = 0{,}44$ un formulu

$$y = \frac{1}{0{,}44x + 0{,}24}.$$

20. tabula

i	$X_i = x_i$	$Y_i = 1/y_i$	$X_i Y_i$	X_i^2
1	0,1	0,285	0,0285	0,01
2	0,2	0,330	0,0660	0,04
3	0,3	0,375	0,1125	0,09
4	0,4	0,420	0,1680	0,16
5	0,5	0,465	0,2325	0,25
6	0,6	0,510	0,3060	0,36
7	0,7	0,556	0,3892	0,49
8	0,8	0,600	0,4800	0,64
9	0,9	0,645	0,5805	0,81
10	1,0	0,690	0,6900	1.00
	$\sum X_i = 5{,}5$	$\sum Y_i = 4{,}876$	$\sum X_i Y_i = 3{,}0532$	$\sum X_i^2 = 3{,}85$

7. uzdevums. Skaitliskā diferencēšana

Aprēķināt tabulas veidā (sk. 14. tabulu) uzdotas funkcijas pirmo un otro atvasinājumu punktos $x = 0{,}54$ un $x = 1{,}3$.

Atvasinājumu aprēķinam izmantojam šīs funkcijas galīgo diferenču tabulu (sk. 15. tabulu).

Tā kā argumenta $x = 0{,}54$ vērtība atrodas tabulas sākumā, tad izmantojam formulas, kas iegūtas no Ņūtona pirmā interpolācijas polinoma, t.i., (110) un (111). Šajās formulās

$$t = \frac{0{,}54 - 0{,}5}{0{,}2} = 0{,}2,$$

kur pieņemts $x_0 = 0{,}5$.

Tad funkcijas pirmā atvasinājuma vērtība no formulas (110)

$$f'(0{,}54) = \frac{1}{0{,}2}(0{,}300 + \frac{2\cdot 0{,}2 - 1}{2}0{,}302 + \frac{3\cdot 0{,}2^2 - 6\cdot 0{,}2 + 2}{6}0{,}071) = 1{,}101$$

un otrā atvasinājuma vērtība no formulas (111)

$$f''(0{,}54) = \frac{1}{0{,}2^2}[0{,}032 + (0{,}2 - 1)0{,}071] = 6{,}13.$$

Atvasinājuma vērtības punktā $x = 1{,}3$, kas atrodas tabulas beigās un ir interpolācijas mezgls, aprēķinām ar formulām (115) un (116):

$$f'(1{,}3) = \frac{1}{0{,}2}(1{,}42 + \frac{0{,}445}{2} + \frac{0{,}072}{3}) = 8{,}33,$$

$$f''(1{,}3) = \frac{1}{0{,}2^2}(0{,}445 + 0{,}072) = 12{,}92.$$

8. uzdevums. Skaitliskā integrēšana

Aprēķināt noteikto integrāli

$$I = \int_{1,5}^{2,1} \frac{\sqrt{0,3x + 1,2}}{\sqrt{x^2 + 0,5}} dx$$

ar: a) taisnstūru metodi; b) trapeču metodi; c) parabolu metodi; d) Čebiševa metodi.

a) Taisnstūru metode.

Integrēšanas intervālu sadalām sešās daļās ($n = 6$). Tad solis

$$h = \frac{2,1 - 1,5}{6} = 0,1 .$$

Izskaitļojam funkcijas vērtību mezglos x_i ($i = 0,1,\ldots,6$) (sk. 21. tabulu).

21. tabula

i	x_i	y_i
0	1,5	0,774
1	1,6	0,741
2	1,7	0,710
3	1,8	0,682
4	1,9	0,656
5	2,0	0,636
6	2,1	0,611

Izmantojot kreiso taisnstūru formulu (121), iegūstam

$$I_{kr} = 0,1(0,774 + 0,741 + 0,710 + 0,682 + 0,656 + 0,633) = 0,420 .$$

un, izmantojot labo taisnstūru formulu (123), –

$$I_{lab} = 0,1(0,741 + 0,710 + 0,682 + 0,656 + 0,633 + 0,611) = 0,403 .$$

b) Trapeču metode.

No formulas (126) un 21. tabulas

$$I = \frac{0,1}{2}[0,744 + 0,611 + 2(0,741 + 0,710 + 0,682 + 0,656 + 0,633)] = 0,410 .$$

c) Parabolu metode.

No formulas (128) un 21. tabulas

$$I = \frac{0,1}{3}[0,744 + 0,611 + 4(0,741 + 0,682 + 0,633) + 2(0,710 + 0,656)] = 0,411 .$$

d) Čebiševa metode.

Aprēķinot noteikto integrāli ar Čebiševa metodi, izmantojama formula (136), kurā $f(z_i)$ vētības noteiktas fiksētos mezglos

$$z_i = \frac{1{,}5 + 2{,}1}{2} + \frac{2{,}1 - 1{,}5}{2} x_i ,$$

kur x_i vērtības sk. 5. tabulu.

Pieņemot mezglu skaitu $n = 6$ un aprēķinot z_i un $f(z_i)$, iegūstam lielumus, kas doti 22. tabulā.

22.tabula

i	x_i	z_i	$f(z_i)$
1	-0,8662	1,540	0,761
2	-0,4225	1,673	0,718
3	-0,2666	1,720	0,704
4	0,2666	1,880	0,661
5	0,4225	1,927	0,650
6	0,8662	2,060	0,619

No 22. tabulas un formulas (136) iegūstam

$$I = \frac{2{,}1 - 1{,}5}{6}(0{,}761 + 0{,}718 + 0{,}704 + 0{,}661 + 0{,}650 + 0{,}619) = 0{,}411 .$$

9. uzdevums. Parastie diferenciālvienādojumi

Atrisināt diferenciālvienādojumu

$$y' = y - x \tag{A}$$

intervālā $[0; 1{,}0]$, ja doti sākumnosacījumi $x = x_0 = 0$, $y_0 = y(x_0) = 1{,}5$ ar: a) iterāciju metodi; b) pakāpes rindu palīdzību; c) Eilera metodi; d) modificēto Eilera metodi; e) Runges–Kutas metodi.

a) Iterāciju metode.

Funkcijas $y = f(x)$ jebkuru n-to tuvinājumu meklējam, izmantojot formulu (142). Saskaņā ar šo formulu sākuma jeb 0-tais tuvinājums

$$y_0 = y(x_0) = 1{,}5 .$$

Pirmo tuvinājumu atrodam kā

$$y_1 = 1{,}5 + \int_0^x (1{,}5 - x)dx ,$$

jeb

$$y_1 = 1{,}5 + 1{,}5x - \frac{x^2}{2} .$$

Otrais tuvinājums

$$y_2 = 1{,}5 + \int_0^x (1{,}5 + 1{,}5x - \frac{x^2}{2} - x)dx = 1{,}5 + 1{,}5x + 0{,}25x^2 - 0{,}167x^3 \,.$$

Trešais tuvinājums

$$y_3 = 1{,}5 + \int_0^x (1{,}5 + 1{,}5x + 0{,}25x^2 - 0{,}167x^3 - x)dx =$$
$$= 1{,}5 + 1{,}5x + 0{,}25x^2 + 0{,}0833x^3 - 0{,}0417x^4 \,.$$

Intervālā $[0; 1{,}0]$ maksimālā kļūda, atmetot locekli $0{,}0417x^4$, nepārsniedz 1,2 %, tāpēc šajā gadījumā aprobežosimies ar trešo tuvinājumu, pieņemot $y \approx y_3$.

b) Atrisināšana ar pakāpes rindu palīdzību.

Risināšanai izmantojam formulu (145). No dotā vienādojuma (sk. (A)) atrodam

$$y'' = y' - 1\,,\ y''' = y''\,,\ y^{\mathrm{IV}} = y'''$$

un, ievērojot sākumnosacījumus,

$$y_0' = y_0 - x_0 = 1{,}5\,,$$
$$y_0'' = 1{,}5 - 1 = 0{,}5\,,$$
$$y_0''' = 0{,}5\,,$$
$$y^{\mathrm{IV}} = 0{,}5\,.$$

Ievietojot šīs vērtības izteiksmē (145) un aprobežojoties ar pieciem locekļiem, iegūstam

$$y = 1{,}5 + 1{,}5x + 0{,}25x^2 + 0{,}0833x^3 + 0{,}0208x^4 \,.$$

c) Eilera metode.

Pieņemot soli $h = 0{,}2$, iegūstam x_i vērtības $x_i = x_0 + 0{,}2i$ ($i = 0,1,2,\ldots,5$). Jebkuru y_{i+1} vērtību aprēķina ar formulām (151) un (152). Risināšanas gaita ilustrēta 23. tabulā.

23. tabula

i	x_i	y_i	$y_i' = y_i - x_i$	$\Delta y_i = 0{,}2y_i'$
0	0	1,500	1,500	0,300
1	0,2	1,800	1,600	0,320
2	0,4	2,120	1,720	0,344
3	0,6	2,464	1,864	0,373
4	0,8	2,837	2,037	0,407
5	1,0	3,244		

d) Modificētā Eilera metode.

Tāpat kā iepriekš pieņemam soli $h = 0{,}2$. Jebkuru y_{i+1} vērtību aprēķina ar formulām (155) un (156). Risināšanas gaita ilustrēta 24. tabulā.

24. tabula

i	x_i	y_i	$y_i' =$ $= y_i - x_i$	$0{,}1y_i'$	$x_{i+1/2} =$ $= x_i + 0{,}1$	$y_{i+1/2} =$ $= y_i + 0{,}1y_i'$	$y'_{i+1/2} =$ $= y_{i+1/2} -$ $- x_{i+1/2}$	$\Delta y_i =$ $= 0{,}1y'_{i+1/2}$
0	0	1,500	1,500	0,150	0,1	1,650	1,550	0,310
1	0,2	1,800	1,610	0,161	0,3	1,971	1,671	0,344
2	0,4	2,144	1,774	0,177	0,5	2,321	1,921	0,384
3	0,6	2,528	1,928	0,193	0,7	2,721	2,021	0,404
4	0,8	2,932	2,132	0,213	0,9	3,145	2,245	0,449
5	1,0	3,381						

e) Runges–Kutas metode.

Tāpat kā iepriekš pieņemam soli $h = 0{,}2$. Saskaņā ar Runges–Kutas metodi jebkuru y_{i+1} vērtību aprēķina ar formulām (159) un (160), ievērojot (161). Risināšanas gaita ilustrēta 25. tabulā.

25. tabula

i	x	y	$y' = y - x$	$0{,}2k =$ $= 0{,}2(y - x)$	Δy
1	2	3	4	5	6
0	0	1,500	1,500	0,300	0,300
	0,1	1,650	1,550	0,310	0,620
	0,1	1,655	1,555	0,311	0,622
	0,2	1,811	1,611	0,322	0,322
					$\frac{1}{6}\sum =$ $= \frac{1}{6}1{,}864 = 0{,}311$
1	0,2	1,811	1,611	0,322	0,322
	0,3	1,972	1,672	0,334	0,668
	0,3	1,978	1,678	0,336	0,672
	0,4	2,147	1,747	0,349	0,349
					$\frac{1}{6}\sum =$ $= \frac{1}{6}2{,}011 = 0{,}335$
2	0,4	2,147	1,747	0,349	0,349
	0,5	2,320	1,820	0,364	0,728
	0,5	2,328	1,828	0,366	0,732
	0,6	2,512	1,912	0,382	0,382
					$\frac{1}{6}\sum =$ $= \frac{1}{6}2{,}191 = 0{,}365$

1	2	3	4	5	6
3	0,6 0,7 0,7 0,8	2,512 2,702 2,711 2,913	1,912 2,002 2,011 2,113	0,382 0,400 0,402 0,423	0,382 0,800 0,804 0,423
					$\frac{1}{6}\sum =$ $= \frac{1}{6} 2{,}409 = 0{,}402$
4	0,8 0,9 0,9 1,0	2,913 3,124 3,136 3,360	2,113 2,224 2,236 2,360	0,423 0,445 0,447 0,472	0,423 0,890 0,894 0,472
					$\frac{1}{6}\sum =$ $= \frac{1}{6} 2{,}679 = 0{,}446$
5	1,0	3,360			

Lai novērtētu aplūkotās diferenciālvienādojumu risināšanas metodes 26. tabulā dots ar šīm metodem iegūto rezultātu salīdzinājums, turklāt tabulas pēdējā kolonnā uzrādītas vērtības, kas izskaitļotas (ar precizitāti līdz trešajai zīmei aiz komata), izmantojot diferenciālvienādojuma analītisko atrisinājumu

$$y = 0{,}5e^{x} + x + 1 .$$

26. tabula

x_i	y_i					
	Iterāciju metode	Pakāpes rinda	Eilera metode	Modificētā Eilera metode	Runges–Kutas metode	Analītiskā metode
0	1,500	1,500	1,500	1,500	1,500	1,500
0,2	1,811	1,811	1,800	1,800	1,811	1,811
0,4	2,144	2,146	2,120	2,144	2,147	2,146
0,6	2,503	2,511	2,464	2,528	2,512	2,511
0,8	2,886	2,911	2,837	2,932	2,913	2,913
1,0	3,292	3,354	3,244	3,381	3,360	3,359

10. uzdevums. Parasto diferenciālvienādojumu robežproblēma

Atrisināt otrās kārtas diferenciālvienādojuma

$$y'' + xy' - 0{,}5\frac{y}{x} = 1$$

robežproblēmu intervālā $[2{,}0;\, 2{,}3]$ ar galīgo diferenču metodi, ja doti šādi robežnosacījumi intervāla galos:

$$y(2{,}0) + 2y'(2{,}0) = 1,$$
$$y(2{,}3) = 2{,}15.$$

Sadalīsim intervālu trīs vienādās daļās ($n = 3$) ar soli $h = 0{,}1$. Tad iegūsim argumenta vērtības $x_0 = 2{,}0$; $x_1 = 2{,}1$; $x_2 = 2{,}2$; $x_3 = 2{,}3$. Izmantojot formulas (170), var uzrakstīt vienādojumu sistēmu, kas satur četrus vienādojumus ar četriem nezināmajiem lielumiem:

$$\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{0{,}1^2} + 2{,}1\frac{y_2 - y_1}{0{,}1} - \frac{0{,}5}{2{,}1}y_1 = 1,$$
$$\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{0{,}1^2} + 2{,}2\frac{y_3 - y_2}{0{,}1} - \frac{0{,}5}{2{,}2}y_2 = 1,$$
$$y_0 + 2\frac{y_1 - y_0}{0{,}1} = 1,$$
$$y_3 = 2{,}15.$$

Izpildot šajos vienādojumos darbības, iegūstam sistēmu

$$100y_0 - 221{,}2y_1 + 121y_2 = 1,$$
$$100y_1 - 222{,}2y_2 + 122y_3 = 1,$$
$$19y_0 - 20y_1 = -1,$$
$$y_3 = 2{,}15,$$

kuras atrisinājuma skaitliskās vērtības dotas 27. tabulā.

27. tabula

x_i	y_i
2,0	2,278
2,1	2,214
2,2	2,172
2,3	2,150

8. EXCEL programmas pamatelementi un galvenās procedūras

Iepriekšējās nodaļās iztirzātās matemātiskās metodes un algoritmus var realizēt, izmantojot datorprogrammas, kas veidotas dažāda līmeņa programmēšanas valodās (BASIC, PASCAL, FORTRAN, MATLAB, MATHCAD, EXCEL u. c.). Viena no vienkāršākajām un vienlaikus visvieglāk pieejamām ir EXCEL programma, kas efektīvi izmantojama arī dažādu elektrotehnikas uzdevumu risināšanai ar skaitliskajām metodēm. Tā kā par programmu EXCEL un tās lietošanu ir pieejama ļoti plaša literatūra, šeit īsi atgādināsim tikai dažas šīs programmas praktiskās lietošanas īpatnības un iespējas.

Darbībai EXCEL vidē izmanto t. s. darba grāmatas un darba lapas. Darba grāmatas (Book1, Book2,…) ir EXCEL faili, kuri var saturēt vienu vai vairākas darba lapas (Sheet1, Shee2,…). Darba lapas var saturēt aprēķinu tabulas, diagrammas, jebkuru tekstu, kā arī to kombināciju.

Lielāko EXCEL loga daļu aizņem tabula ar ligzdām, kuru adreses apzīmētas ar burtu un ciparu kombināciju (ar burtiem A, B, C,… apzīmētas kolonnas, ar cipariem 1, 2, 3,… – rindiņas). Jebkuru informāciju (skaitli, formulu, komandu, tekstu u. tml.) ievada, pārvietojot kursoru izvēlētajā ligzdā, ierakstot attiecīgos simbolus un nospiežot taustiņu Enter vai pārvietojot kursoru uz jebkuru citu ligzdu. Ievadītā informācija vienlaikus parādās arī formulas rindiņā.

Teksta iezīmēšanu, kas vajadzīga, piemēram, kopēšanai, pārvietošanai, izdzēšanai, veic šādi. Ja jāiezīmē atsevišķas ligzdas teksts, kursoru novieto šajā ligzdā un nospiež peles kreiso taustiņu. Rindiņu iezīmē, nospiežot peles taustiņu uz attiecīgās rindiņas numura (tabulas kreisajā pusē), bet kolonnu – nospiežot peles taustiņu uz iezīmējamās kolonnas numura (tabulas augšdaļā). Ja jāiezīmē vairākas rindiņas vai kolonnas pēc kārtas, sāk ar pirmo no tām un velk peli ar nospiestu kreiso taustiņu līdz pēdējai iezīmējamai rindiņai vai kolonnai, bet ja vienlaicīgi iezīmējamās rindiņas vai kolonnas neatrodas blakus, papildus jānospiež vēl arī taustiņš Ctrl. Ja jāiezīmē ligzdu bloks, sāk ar pirmo ligzdu un pēc tam ar nospiestu peles taustiņu kursoru velk horizontāli, vertikāli vai pa diagonāli.

Jaunas rindiņas vai kolonnas jau darbā esošā tabulā var ievietot, iezīmējot rindiņu (rindiņas) vai kolonnu (kolonnas), pirms kurām nepieciešams ievietot, un pēc tam izmantojot izvēlnes komandu **Insert-Rows** vai **Insert-Columns**. Rindiņu vai kolonnu var izņemt, vispirms to iezīmējot un pēc tam izmantojot izvēlnes komandu **Edit-Delete**. Ievietojot vai izņemot rindiņu vai kolonnu, automātiski mainās to numerācija, t. i., ligzdu adreses. Nepieciešams atgādināt, ka iezīmējot rindiņu (kolonnu) un nospiežot taustiņu Delete, tiek izdzēsts tikai rindiņas (kolonnas) ieraksts, bet pati rindiņa (kolonna) paliek savā vietā ar iepriekšējo adresāciju.

Failu saglabāšanu un atvēršanu veic tādiem pašiem līdzekļiem kā jebkurai programmai WINDOWS vidē. EXCEL faili ir ar paplašinājumu **.xls**. Izdrukājot EXCEL failus, var ne tikai iestatīt teksta orientāciju lapā ar **Portrait** vai **Landscape**, bet arī norādīt mērogu un izdrukājamo apgabalu (sk. izvēlnes komandas **File-Page Setup**, **File-Print-Properties**, **File-Print-Area**).

Kopēšanu, izgriešanu, pārnešanu, ievietošanu, ja šīs darbības jāizpilda viena loga robežās, visērtāk veikt ar peli. Kopējot vai pārvietojot ar peli, jāvelk aiz izdalītā bloka rāmīša uz vajadzīgo tabulas vietu. Iepriekš minēto operāciju veikšanai var izmantot arī piktogrammas **Cut**, **Copy** un **Paste**, kā arī izvēlnes komandas **Edit-Cut**, **Edit-Copy**, **Edit-Paste**. Noklusējot tiek kopēti visi ligzdas atribūti (formula, ar šo formulu izskaitļotā vērtība, formāts). Ja jākopē vai jāpārvieto tikai kāds no minētajiem atribūtiem, izvēlnes komandas **Edit-Paste** vietā jālieto komanda **Edit-Paste-Special…**. Jāievēro, ka kopējot vai pārvietojot, mainās ligzdu adreses (relatīvās adreses). Ja tas nav vajadzīgs, izmanto ligzdu absolūtās adreses, kuru apzīmēšanai lieto papildus simbolu "$". Piemēram, ligzdu, kas atrodas 2. rindiņas un E kolonnas šķērsošanās vietā, var numurēt četros dažādos veidos: E2; E2; $E2; E$2. Pirmajā gadījumā tas nozīmē ligzdas relatīvo adresi, otrajā – ligzdas absolūto adresi, trešajā – absolūto adresi visām kolonnām, kuras šķērso 2. rindiņa, ceturtajā – absolūto adresi visām rindiņām, kuras šķērso E kolonna.

Formulu ievadei vai rediģēšanai izvēlas attiecīgo ligzdu un, kursoru pārvietojot uz formulas rindiņu, nospiež peles kreiso taustiņu. Formulas vai matemātiskās operācijas ievadīšana, lai to atšķirtu no teksta vai skaitļa ievadīšanas, jāsāk ar simbolu "=". Piemēram, =A1+A2/2 nozīmē, ka attiecīgajā ligzdā tiks ierakstīts rezultāts, kas iegūts aritmētiskas operācijas rezultātā, t. i., ligzdas A1 skaitļa vērtībai pieskaitot pusi no ligzdas A2 skaitļa vērtības.

Programmā EXCEL matemātisko operāciju (aritmētisko un loģisko) apzīmēšanai lieto šādus simbolus: "+" – saskaitīšana; "-" – atņemšana; "*" – reizināšana; "/" – dalīšana; "^" – kāpināšana; "=" – vienāds; "<" – mazāks; ">" – lielāks; "<=" – mazāks vai vienāds; ">=" – lielāks vai vienāds; "<>" – nevienāds.

Programma EXCEL ļauj izmantot plašu matemātisko funkciju klāstu, ar kurām var realizēt visdažādākās aritmētiskās un loģiskās operācijas.

Jebkuru aritmētisko vai loģisko funkciju attiecīgajā ligzdā var ievadīt, izmantojot funkciju dispečera piktogrammu "$\boldsymbol{f_x}$", uz kuras nospiežot peles kreiso taustiņu, ekrānā parādās izvēlei iespējamo funkciju saraksts. Nepieciešamo funkciju izvēlas, nospiežot divreiz peles kreiso taustiņu uz attiecīgās funkcijas nosaukuma, vai iezīmējot ar peli funkcijas nosaukumu un nospiežot taustiņu OK. Atveroties logam, ievada funkcijas argumentus un nospiež taustiņu OK. Kursoram atrodoties attiecīgajā ligzdā, jebkuru funkciju var ievadīt, formulas rindiņā ierakstu sākot ar simbolu "=" un argumentu ieslēdzot iekavās, piemēram, =**SIN**(A3), =**EXP**(1,5+B3), =2,5/C3+**SQRT**(A5^2+B^2). Ievadītās funkcijas izpildei jānospiež taustiņš Enter. Skaitli π arī var ievadīt kā funkciju bez argumenta norādes, formulas rindiņā ierakstot =pi().

Veicot darbības ar matricām, jāievēro vairākas īpatnības. Funkcijas arguments šajā gadījumā ir matrica, kuras elementi aizņem vairāku ligzdu bloku, un šo argumentu ievada, norādot ligzdu bloka augšējās kreisās ligzdas un apakšējās labās ligzdas adreses, kas atdalītas ar kolu ":". Piemēram, inversās matricas aprēķināšanai jāveic šādas darbības:

- jāiezīmē ligzdu bloks, kurā paredzēts ierakstīt rezultātu;
- formulas rindiņā jāieraksta funkcijas nosaukums ar iekavās norādīto argumentu, piemēram, =**MINVERSE**(D4:G7), kur **MINVERSE** – funkcijas nosaukums; D4:G7 – ligzdu bloka robežas, kurā ierakstīta ceturtās kārtas kvadrātiska matrica;
- vienlaicīgi jānospiež taustiņu kombinācija Ctrl+Shift+Enter (nospiežot tikai taustiņu Enter, kā to dara izpildot parastās funkcijas, Excel tabulā parādās tikai viens inversās matricas elements).

Līdzīgas darbības jāveic, reizinot divas matricas. Šajā gadījumā:

- jāiezīmē ligzdu bloks, kurā paredzēts ierakstīt rezultātu;
- formulas rindiņā jāieraksta funkcijas nosaukums, iekavās norādot divu argumentu vērtības, kas atdalītas ar semikolu ";", piemēram, =**MMULT**(H4:K7;B5:B8), kur **MMULT** – funkcijas nosaukums; H4:K7 un B5:B7 – attiecīgi trešās kārtas kvadrātiskas matricas un trešās kārtas kolonnas matricas ligzdu bloku robežas.

Programmas EXCEL izmantošanu skaitlisko metožu realizācijā vairumā gadījumu var padarīt daudz efektīvāku, ja līdztekus aritmētiskajām operācijām izmanto arī loģiskās operācijas un loģiskās funkcijas **IF** ("ja"), **AND** ("un" – loģiskais reizinājums), **OR** ("vai" – loģiskā summa), **NOT** ("nē" – loģiskais noliegums). Praksē visbiežāk iznāk lietot loģisko funkciju **IF**, piemēram, gadījumos, kad atkarībā no kaut kāda lieluma skaitliskās vērtības vai zīmes, jāveic dažādas alternatīvas darbības. Funkcijas **IF** vispārējā pieraksta forma ir šāda: **IF**(Arg1;Arg2;Arg3), kur Arg1 – loģiskā izteiksme; Arg2 – skaitliska vērtība, ligzdas adrese, jebkura EXCEL funkcija vai aritmētiska izteiksme (vai šo elementu kombinācija), ja loģiskās izteiksmes rezultāts ir **TRUE**; Arg3 – skaitliskā vērtība, ligzdas adrese, jebkura EXCEL funkcija vai aritmētiska izteiksme (vai šo elementu kombinācija), ja loģiskās izteiksmes rezultāts ir **FALSE**. Lai izpildītu, piemēram, loģisko funkciju **IF**(**SIN**(A1+A2+0,5)<0;A1-A2;0,01), kursors jānovieto ligzdā, kurā paredzēts ierakstīt rezultātu, formulas rindiņā jāievada šī funkcija un jānospiež Enter. EXCEL programma aprēķina loģiskās izteiksmes vērtību. Ja šī vērtība ir **TRUE**, attiecīgājā ligzdā parādās skaitliskā vērtība, kas iegūta kā darbības A1-A2 rezultāts, ja **FALSE** – ligzdā parādās skaitlis 0,01.

Lai ar EXCEL programmas līdzekļiem uzzīmētu tabulas veidā uzdotas funkcijas $y_i = f(x_i)$ grafiku, vispirms sastāda tabulu, kuras vienā kolonnā ierakstītas argumenta x_i vērtības, bet blakus kolonnā – atbilstošās funkcijas vērtības y_i. Pēc tam iezīmē abas kolonnas un izvēlas piktogrammu **Cart Wizard**. Uz ekrāna atveroties logam **Standard Types**, izvēlas grafika veidu **XY (Scatter)** un pēc tam vienu no paveidiem un nospiež taustiņu **Finish**. Iegūto grafiku var papildināt ar dažādiem atribūtiem un, ja vajadzīgs, izdrukāt.

8. Pielikums

Lineāru vienādojumu sistēma.

1a. Atrisināt lineāru vienādojumu sistēmu ar matricu metodi:

0,3*X1+0,9*X2-1,3*X3=0,4
1,5*X1-0,7*X2+1,1*X3=-0,4
2,5*X1+5,8*X2-0,5*X3=3,5

Matrica A			Matr. B	Inversā matrica A			X
0,3	0,9	-1,3	0,4	0,492486	0,579059	-0,00653	-0,0575
1,5	-0,7	1,1	-0,4	-0,28585	-0,25319	0,186214	0,63868
2,5	5,8	-0,5	3,5	-0,85348	-0,04165	0,127409	0,121202

1b. Atrisināt lineāru vienādojumu sistēmu ar iterāciju metodi (ar precizitāti 0,01):

Vienādojumu sistēma pēc ekvivalentiem pārveidojumiem, kuri veikti, lai nodrošinātu konverģences nosacījumus:

3,3*X1-0,5*X2+0,9*X3=-0,4
2,5*X1+5,8*X2-0,5*X3=3,5
0,3*X1+0,9X2-1,3X3=0,4

Matrica A			Matr. B	Matrica α			Matr. β
3,3	-0,5	0,9	-0,4	0	0,151515	-0,27273	-0,12121
2,5	5,8	-0,5	3,5	-0,43103	0	0,086207	0,603448
0,3	0,9	-1,3	0,4	0,230769	0,692308	0	-0,30769

0. tuvinājums

X(0)=β
-0,12121
0,603448
-0,30769

1. tuvinājums X(1)=β+α*X(0)

β	α			X(0)	α*X(0)	X(1)	|X(1)-X(0)|
-0,12121	0	0,151515	-0,27273	-0,12121	0,175348	0,054136	0,175348
0,603448	-0,43103	0	0,086207	0,603448	0,025721	0,62917	0,025721
-0,30769	0,230769	0,692308	0	-0,30769	0,3898	0,082108	0,3898

2. tuvinājums X(2)=β+α∗X(1)

β	α			X(1)	α*X(1)	X(2)	|X(2)-X(1)|
-0,12121	0	0,151515	-0,27273	0,054136	0,072936	-0,04828	0,102412
0,603448	-0,43103	0	0,086207	0,62917	-0,01626	0,587192	0,041977
-0,30769	0,230769	0,692308	0	0,082108	0,448072	0,14038	0,058272

3. tuvinājums X(3)=β+α*X(2)

β	α			X(2)	α*X(2)	X(3)	|X(3)-X(2)|
-0,12121	0	0,151515	-0,27273	-0,04828	0,050683	-0,07053	0,022253
0,603448	-0,43103	0	0,086207	0,587192	0,03291	0,636359	0,049166
-0,30769	0,230769	0,692308	0	0,14038	0,395377	0,087685	0,052695

4. tuvinājums X(4)=β+α*X(3)

β	α			X(3)	α*X(3)	X(4)	|X(4)-X(3)|
-0,12121	0	0,151515	-0,27273	-0,07053	0,072504	-0,04871	0,021821
0,603448	-0,43103	0	0,086207	0,636359	0,037959	0,641408	0,005049
-0,30769	0,230769	0,692308	0	0,087685	0,42428	0,116588	0,028903

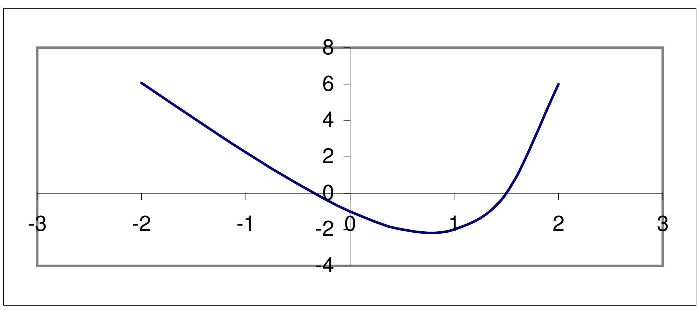
5. tuvinājums X(5)=β+α*X(4)							
β	α			X(4)	α*X(4)	X(5)	|X(5)-X(4)|
-0,12121	0	0,151515	-0,27273	-0,04871	0,065386	-0,05583	0,007118
0,603448	-0,43103	0	0,086207	0,641408	0,031046	0,634494	0,006914
-0,30769	0,230769	0,692308	0	0,116588	0,432811	0,125119	0,008531

Nelineāri vienādojumi.

2a. Atrisināt nelineāru vienādojumu ar bisekciju metodi (ar precizitāti 0,01):

4^x-4*x-2=0

x	f(x)
-2	6,0625
-1,5	4,125
-1	2,25
-0,5	0,5
0	-1
0,5	-2
1	-2
1,5	-1,8E-15
2	6



Precizējam mazāko saknes vērtību, kas atrodas intervālā [-1,0; 0]

an	bn	cn	f(an)	f(cn)	s= f(an)*f(cn)	Ja s<0, tad a1=a0, ja s>0, tad a1=c0	Ja s<0, tad b1=c0, ja s>0, tad b1=b0	|bn-an|
-1	0	-0,5	2,25	0,5	1,125	-0,5	0	1
-0,5	0	-0,25	0,5	-0,29289	-0,1464	-0,5	-0,25	0,5
-0,5	-0,25	-0,375	0,5	0,094604	0,04730	-0,375	-0,25	0,25
-0,375	-0,25	-0,3125	0,094604	-0,10158	-0,00961	-0,375	-0,3125	0,125
-0,375	-0,3125	-0,34375	0,094604	-0,00407	-0,00039	-0,375	-0,34375	0,0625
-0,375	-0,34375	-0,35938	0,094604	0,045124	0,00427	-0,35938	-0,34375	0,0312
-0,35938	-0,34375	-0,35156	0,045124	0,02049	0,00092	-0,35156	-0,34375	0,0156
-0,35156	-0,34375	-0,34766						0,0078

2b. Atrisināt nelineāru vienādojumu ar hordu metodi (ar pecizitāti 0,01):

4^x-4*x-2=0

Precizējam mazāko saknes vērtību, kas atrodas intervālā [-1,0; 0]

Funkcijas f(x) =4^x-4*x-2 otrais atvasinājums ir f"(x)=4^x*(ln(4))^2

Punktā x=a=-1 f(-1) =2,25; f"(-1) =0,48 un f(-1)*f"(-1) =1,08>0 un tāpēc par hordas nekustīgo punktu jāņem punkts a.

n	xn	f(xn)	xn-a	|xn-xn-1|
0	0	-1	1	
1	-0,30769	-0,11647	0,692308	0,307692
2	-0,34177	-0,01029	0,658233	0,034075
3	-0,34476			0,002998

2c. Atrisināt nelineāru vienādojumu ar Ņūtona metodi (ar precizitāti 0,01):

4^x-4*x-2=0

Precizējam mazāko saknes vērtību, kas atrodas intervālā [-1,0; 0]

Funkcijas f(x)=4^x-4*x-2 pirmais atvasinājums ir f'(x)=4^x*(4)-4

n	xn	f(xn)	f'(xn)	|xn-xn-1|
0	-1	2,25	-3,65343	
1	-0,38414	0,123676	-3,18608	0,61586
2	-0,34532	0,000866	-3,14108	0,038818
3	-0,34505			0,000276

2d. Atrisināt nelineāru vienādojumu ar iterāciju metodi (ar precizitāti 0,01):

4^x-4*x-2=0

Precizējam mazāko saknes vērtību, kas atrodas intervālā [-1,0; 0]

Konverģenci nodrošina izejas vienādojuma šāda pārveidota forma: x=0,25*4^x-0,5,

kur $\varphi(x)$ = 0,25*4^x-0,5

Par 0-to tuvinājumu izvēlamies x vērtību x0=(a+b)/2=(-1+0)/2=-0,5

n	xn	φ(xn)	|xn-xn-1|
0	-0,5	-0,375	
1	-0,375	-0,35135	0,125
2	-0,35135	-0,34639	0,023651
3	-0,34639		0,004955

Literatūra

1. Данилина Н. И., Дубровская Н. С., Кваша О. П., Смирнов Г. Л. Вычислительная математика. М.: ”Высш. школа”, 1985.
2. Данилина Н. И., Дубровская Н. С., Кваша О. П., Смирнов Г. Л., Феклисов Г. И. Численные методы. М.: ”Высш. школа”, 1976.
3. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М.: ”Наука”, 1965.
4. Бронштейн И. Н., Семендяев И. А. Справочник по математике. М., ”Наука”, 1981.
5. M. Buiķis, B. Siliņa. Matemātika. Definīcijas, formulas, aprēķinu algoritmi. R.: “Zvaigzne ABC”.

Saturs