

1. Ievads

Elektroenerģētika attiecās pie visvairāk automatizētās rūpniecības nozares. Jau pašā elektroenerģētikas attīstības sākumā noskaidrojās, ka procesu notikšanu ātrumu dēļ, it sevišķi avārijas režīmos, cilvēks nav spējīgs laicīgi pieņemt mērus, avārijas lokalizēšanai, kas var radīt lielus zaudējumus. Energosistēmām attīstoties un palielinot arvien sarežģītākām, automātikas ierīču skaits palielinās ar ļoti lieliem tempiem. Automātikas ierīču skaits dubultojas katrus 5- 7 gadus. Radās problēmas saistītas ar šo ierīču ražošanu un ekspluatāciju. Uzrādītās problēmas nosacītas ar milzīgu ierīču nomenklatūru, mazu partiju ražošanu, kā arī ar augstām prasībām par to drošību. Pašlaik tiek ražotas un ekspluatētas energosistēmu automātikas ierīces, kuras būvētas uz novecojošo elektromehānisko elementu bāzes, kā arī uz modernas augstas integrācijas pakāpes mikroelektronikas bāzes. Kopējs ierīcēm, kuras radītas uz tik dažādu elementu bāzes, ir informācijas apstrādes princips. Lielākā daļa energosistēmu automātikas veidotas uz signālu apstrādes analogo principu bāzes. Uzrādītā principa pielietošana rada virkni problēmu, no kurām galvenās ir:

- universālu ierīču radīšanas neiespējamība vai dārdzība, derīgas pielietošanai dažādos enerģētiskos objektos;
- ierīču radīšanas sarežģītība, kuriem ir pašpārbaudes vai automātiskā bojājumu noteikšana.

Nosaukto problēmu pārvarēšana palika iespējama parādoties lētiem, diezgan jaudīgiem un universāliem mikro-ESM. Ierīces, kuras ir uzbūvētas uz mikro-ESM bāzes, izmanto signālu apstrādes ciparu principu. Sekojoši, rodas nepieciešamība šo principu apgūšana energosistēmas automatizācijas speciālistiem. Signālu (datu, informācijas) apstrādes ciparu princips interesē speciālistus no dažādām nozarēm. Uzdevumi, kuri risināmi viņu darbības sfērā ir visai daudzveidīgi. Vēl daudzveidīgākas ir metodes, pieejas un veidi šo uzdevumu risināšanai. Atšķirīgi aspekti datu apstrādes ciparu principa pielietošanai, ievērojama vieta piešķirta virknē fundamentālās (informācijas teorija, kodēšanas teorija, skaitļošanas matemātika u.c.) disciplīnās. Dotais mācību līdzeklis nevar un neuzdod kā mērķi aptvert visu viņu daudzveidību, kas attiecās uz signālu ciparu apstrādi. Nav vienkārši šobrīd izdalīt galveno no apskatāmās jomas, kas nepieciešams zināt energosistēmu automatizācijas speciālistiem. Bet ir jau skaidrs, ka energosistēmu automātikas lielākā daļa saturēs savā struktūrā ciparu filtrus., kuru analīzes un sintēzes metodēm ir veltīts šis referāts.

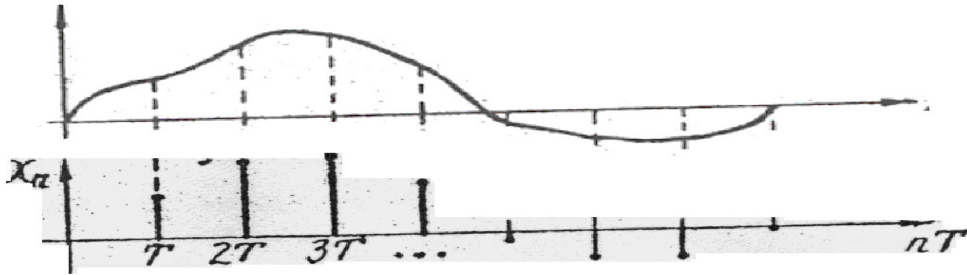
2. Analītiskās pamatsakarības

2.1. Nepārtraukto signālu sadalīšana.

Energosistēmas automātikas vairumam ierīču ieejas signālam ir nepārtraukts laikā (analog) raksturs. Pie jebkuras automātikas ierīčuradīšanas, darbojošos uz informācijas ciparu apstrādi nepieciešams izpildīt ieejas signālu sadalīšanu vai kvantēšanu pēc laika funkcijas. Lai sadalītu vai kvantētu laikā nepārtrauktu funkciju $x(t)$ jāformē funkcija

$$X_n(nT) = \begin{cases} x(t), & t = nT; \\ 0, & t \neq nT, \end{cases} \quad (2.1.)$$

kur T - sadalīšanas intervāls jeb solis. Funkciju $X_n(nT)$ sauc par režģa funkciju. Nepārtrauktas funkcijas $x(t)$ pārveidošanu režģa funkcijā $X_n(nT)$ parādīts att.1



Att.1 Laika funkcijas sadalīšana

Signālus, kurus apraksta režģa funkcija, pieņemts saukt par diskrētiem. Tie var būt noteikti laika momentos $T, 2T, \dots$ jebkuras vērtības kādā noteiktā laika intervālā. Lai šādus signālus ievadītu mikroprocesora atmiņā jāizpilda vēl viena pārveidošana – signāla līmeņa kodēšana. Kodēšanu parasti izpilda izmantojot dubultos signālus 0 un 1. Koda izlāžu skaits viennozīmīgi saistīts ar līmeņu skaitu K , kuru spējīgs aprakstīt dotais kods: $m = \log_2 K$.

Kodētu diskrētu signālu pieņemts saukt par ciparu signālu. Kodēšanas operācija pie ierobežota skaitļa m ir nelineāra (vienmēr nepieciešama noapaļošana) un lineāro sistēmu teorijas pielietošana ciparu signāliem nav stingri noteikta. Taču nelineārie efekti, kā likums, jau jūtami pie nelielām m vērtībām un var tikt ņemti vērā papildus [1]. Ņemot vērā teikto, turpmāk runāsim tikai par režģa funkcijām un diskrētiem signāliem un neaplūkosim nelineāros efektus, kurus izsauc kodēšanas operācija.

Jebkuru konkrētu $x_n(nT)$ vērtību pie noteikta n (piemēram, pie $n=3$) pieņemts saukt par atskaites vērtību. Atskaites vērtību krājums veido izvēlni. Automātikas ierīču uz mikroprocesoru bāzes jābūt spējīgai, izmantojot ierobežota garuma ieejas signāla izvēlni (par izvēlnes garumu sauc izmantoto atskaišu skaitu), izveidot izejas signālu $y_n(nT)$, kurš iedarbojas uz objekta automātisko regulēšanu.

Rodas jautājums kā aprakstīt matemātisko saistību starp izejas signālu $y_n(nT)$ un ieejas signālu $x_n(nT)$. Šeit lietderīgi atcerēties, ka lineārās automātikas regulēšanas ierīcēs, kuras izveidotas uz analogā informācijas apstrādes principa saistību starp izejas un ieejas signāliem apraksta lineārs diferenciāls vienādojums ar patstāvīgiem koeficientiem.

Ciparu sistēmu vienādojumu analogs, kurš operē ar režģu funkcijām, ir starpības vienādojumi. Lai definētu starpības vienādojumu, noteiksim dažas papildus definīcijas. Režģa funkcijas diferenciāļu analogs ir gala starpības. Pirmās kārtas tiešā gala starpība, vai vienkārši pirmā starpība, tiek noteikta ar izteiksmi

$$\Delta X(nT) = X(nT + T) - X(nT), \quad (2.2)$$

t.i. pirmā starpība ir starpība starp divām sekojošām atskaitēm.

Acīmredzot, ka funkcija $\Delta X(nT)$ arī ir režģa funkcija.

Pirmo starpību no režģa funkcijas $\Delta X(nT)$ sauc par otrās kārtas tiešo starpību (otrā starpība), kuru nosaka izteiksme

$$\Delta^2 X(nT) = \Delta X(nT + T) - \Delta X(nT) = X(nT + 2T) - 2X(nT + T) + X(nT). \quad (2.3)$$

Analoģiski var noteikt tiešās starpības K -to kārtu

$$\Delta^k X(nT) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \frac{k!}{i!(k-i)!} X(nT + kT - iT). \quad (2.4)$$

Izmantojot tiešo starpību definīcijas var uzrakstīt starpības vienādojumu, kurš apraksta ciparu regulēšanas sistēmu:

$$a_m \Delta^m X(nT) + a_{m-1} \Delta X(nT) + \dots + a_0 X(nT) = b_1 \Delta^l y(nT) + \dots + b_0 y(nT) \quad (2.5)$$

Vienādojums (2.5) uzrakstīts formā vistuvāk diferenciālam vienādojumam, kurš apraksta analogo lineāro automātiskās regulēšanas sistēmu un pamatā pielietojama, lai parādītu formālo analogiju starp regulēšanas ciparu un analogo sistēmu. Vienādojumu (2.5) var uzrakstīt arī citā formā, kuru turpmāk arī izmantosim:

$$y(nT) = \sum_{i=0}^m C_i x[(n-i)T] + \sum_{j=0}^e d_j y[(n-j)T] \quad (2.6)$$

Vienādojums (2.6), atšķirībā no vienādojuma (2.5), nesatur tiešās starpības un darbojas ar ieejas režģa funkcijas $x(nT)$ un izejas funkcijas $y(nT)$ atskaites lielumiem. Pie kam, protams, nav nekādas neatbilstības, kas ir acīmredzams, ja ņem vērā, ka jebkuras kārtas tiešā starpība tiek noteikta kā atskaišu rindas lineāra kombinācija. Pāreja no starpības vienādojuma pieraksta formas (2.5) uz (2.6) pat augstākās kārtas vienādojumiem nesagādā grūtības.

2.2 Diskrētais Laplasa izteiksmes pārveidojums un Z- pārveidojums

Risinot starpības vienādojumus ciparu regulēšanas sistēmu analīzei plaši izmanto matemātisko Z- pārveides līdzekli, kas ir piemērots impulsu funkcijām laplasa matemātiskās pārveides līdzeklis.

Režģa funkcijas $x(nT)$ Z pārveidi nosaka vienādojums

$$Z \{x(nT)\} = x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) Z^{-n} \quad (2.7)$$

Simbols $\{ \}$ nozīmē tiešās darbības Z - pārveidojumi.

Iespējama arī atgriezeniska pāreja no Z -pārveidojuma uz režģu funkciju $x(nT)$.

Šī pāreja $\{ \}$ turpmāk nebūs nepieciešama, tādēļ šeit nav uzrādīta.

Uzrādīsim pamata īpašības Z -pārveidojumam (2.1).

1. Linearitāte. Ja c - nemainīgs koeficients, neatkarīgs no n un T , tad

$$Z\{cx(nT)\} = cZ\{x(nT)\} = cx(Z), \quad (2.8)$$

Z - pārveidojumu summa vienādībām vienāda ar Z - pārveidojumu summu katrai no vienādībām

$$Z\{x_1(nT) + x_2(nT)\} = Z\{x_1(nT)\} + Z\{x_2(nT)\} = x_1(Z) + x_2(Z) \quad (2.9)$$

2. Starpību attēlošana. Režģa funkcijas tiešās starpības raksturo

$$Z\{\Delta x(nT)\} = (Z-1)x(Z) - Zx(0). \quad (2.10)$$

3. Aiztures teorēma. Ja zināms režģa funkcijas Z -pārveidojumi $x(nT)$, tad Z -pārveidojumus režģa funkcijai $x(nT-mT)$, kur $m = \text{const}$, tiek noteikti

$$Z\{x(nT-mT)\} = Z^{-m}x(Z). \quad (2.11)$$

4. Režģa funkciju apvienošana. Ja $x_1(Z) = Z\{x_1(nT)\}$ un $x_2(Z) = Z\{x_2(nT)\}$,

$$x_1(Z) * x_2(Z) = Z \left\{ \sum_r^n x_1(nT-rT) * x_2(rT) \right\} \quad (2.12)$$

5. Starpības vienādojumu risinājumi. Pieņemsim lineāru starpības vienādojumu ar nemainīgiem koeficientiem (2.6). Pielietojot Z -pārveidojumus kreisai un labai vienādojuma pusēm un pieņemot nulles sākuma nosacījumus, ņemot vērā 1 un 3 īpašības iegūsim

$$y(Z) = \sum_{i=0}^r c_i Z^i x(Z) + \sum_{j=1}^m d_j Z^j y(Z), \quad (2.13)$$

kur $x(Z)$ un $y(Z)$ režģa funkciju $x(nT)$ un $y(nT)$ Z -pārveidojumi.

Izteiksmi (2.13) var pārveidot sekojošā izskatā

$$y(Z) = H(Z) * x(Z), \quad (2.14)$$

$$H(Z) = \frac{\sum_{i=0}^r c_i Z^i}{1 - \sum_{j=1}^m d_j Z^j} \quad (2.15)$$

Funkcija $H(Z)$, kura saista Z -pārveidojumu ieejas un izejas secības sauc par diskrēto pārvades funkciju.

Diskrētā pārvades funkcija $H(Z)$ var tikt izteikta sekojošā veidā

$$H(Z) = \frac{a_m [(Z^1 - P_1) \dots (Z^1 - P_r)]}{[(1 - Z_1 Z^1) \dots (1 - Z_m Z^1)]} \quad (2.16)$$

Nemainīgie P_i , pie $i=0, \dots, r$, tiek nosaukti par nullēm, bet nemainīgie Z_j , pie $j=1, \dots, m$, par diskrētās pārvades funkcijas poliēm.

Zināmas metodes izteiksmes(2.15) pārveidošanai, lai ērti pielietotu atgriezeniskos Z -pārveidojumus. atgriezeniskā Z -pārveidojuma pielietošana(apzīmēta ar simbolu $Z^{-1}\{\}$) diskrētai pārvades funkcijai, ļauj iegūt diskrēto impulsu pārejas funkciju $\omega(nT)$

$$\omega(nT) = Z^{-1}\{H(Z)\}, \quad (2.17)$$

zināšanas par kuru uz režģa funkciju apvienošanas teorēmas bāzes un ņemot vērā vienādību(2.14) iegūt starpības vienādojuma atrisinājumu

$$y(nT) = \sum_{m=0}^n \omega(nT - mT)x(mT). \quad (2.18)$$

Tādā veidā, pie uzdotās ieejas secības $x(nT)$ izvēlnes un pie zināmiem starpības vienādojuma veidiem(2.6) var iegūt izejas secību $y(nT)$.

2.3. Pārbaudes uzdevuma jautājumi.

1. Kādas ir sagaidāmās ciparu automātiskās regulēšanas sistēmu priekšrocības, salīdzinot ar analogajām?
2. Salīdziniet vienādojumu(2.5) ar vienādojumu, kurš apraksta lineārās analogās automātiskās regulēšanas sistēmas darbību.
3. pieņemot koeficientus a un v , pie $m=2$ un $l=1$ pārveidojiet vienādojumu(2.5) uz vienādojumu(2.6).
4. Salīdziniet galvenās Z -pārveidojuma īpašības ar galvenajām Laplasa pārveidojuma īpašībām.

3. Ciparu filtru veidi

Aprakstot regulēšanas ciparu sistēmu pielieto sekojošu vienādojumu:

$$y(nT) = \sum_{i=0}^m C_i x[(n-i)T] + \sum_{j=1}^e d_j y[(n-j)T]. \quad (2.1)$$

Ierīci, kas realizē šo vienādojumu, pieņemts saukt par ciparu filtru. Izšķir divus ciparu filtru veidus – rekursīvie un nerekursīvie. Gadījumā, ja vienādojumā (2.1.), kas apraksta cipara filtra darbību, visi koeficienti d_j ir vienādi ar nulli, saka, ka filtrs ir nerekursīvs. Šajā gadījumā vienādojums (2.1.) vienkāršojas un reducējas sekojošā veidā:

$$y(nT) = \sum_{i=0}^m c_i x[(n-i)T]. \quad (2.2)$$

Atbilstoši vienkāršojas arī izteiksme

$$H(Z) = \frac{\sum_{i=0}^r c_i Z^{-i}}{1 - \sum_{j=1}^m d_j Z^{-j}}, \quad (2.3)$$

kas apraksta diskrēto pārvades funkciju, un reducējas sekojošā veidā:

$$H(Z) = \sum_{i=0}^r c_i Z^{-i}. \quad (2.4)$$

Ja vienādojumā (2.1) kaut vai viens d_j koeficients nav vienāds ar nulli, tad filtrs ir nerekursīvs. Pie tam vienādojums, kas apraksta filtra darbību, un izteiksme, kas apraksta diskrēto pārvades funkciju, saglabā izskatu atbilstoši (2.1) un (2.3).

4. Frekvenču raksturlīknes

Ciparu filtra kompleksā raksturlīkne ir $Z = e^{j\omega T}$ aizvietošana pārvades funkcijā (2.4) un (2.3.) veidā rezultāts. Funkcijai $H(e^{j\omega T})$ ir sekojoša fiziskā jēga. Ja uz filtra ieeju ir padots kompleksais harmoniskais signāls $e^{n\omega T}$, tad filtra izejošā signāla izskats nostabilizējošā režīmā būs $H(e^{j\omega T})e^{j\omega T}$. Kompleksās frekvences raksturlīknes moduli $A(\omega)$ sauc par filtra amplitūdas frekvences raksturlīkni:

$$A(\omega) = |H(e^{j\omega T})|. \quad (3.1)$$

Par kompleksās frekvences raksturlīknes argumentu $\varphi(\omega)$ sauc par filtra fāzes frekvences raksturlīkni:

$$\varphi(\omega) = \arg[H(e^{j\omega T})]. \quad (3.2)$$

Ja uz cipara filtra ieeju padot režģveidīgu sinusoidālo funkciju $\{\sin n\omega T\}$, tad filtra izejā parādīsies tādas pašas frekvences sinusoīda, kuras amplitūda tiks noteikta ar

amplitūdas frekvences raksturlīkni, bet fāze (attiecīgi ieejošai sinusoīdai) – fāzes frekvences raksturlīkne.

Nav grūti pamanīt, ka ciparu filtru īpašības aprakstās ar frekvences raksturlīknēm, kurām ir tāds pats nosaukums un visai līdzīga fiziskā jēga ar lineāro automātisko regulēšanas sistēmu frekvences raksturlīknēm. Pie tam tomēr ir viena visai būtiska atšķirība. Visām ciparu filtru frekvences raksturlīknēm ir periodisks raksturs. Tiešām, par cik $e^{j\omega T}$ - periodiska funkcija ar frekvences periodu $\theta_\omega = \frac{2\pi}{T}$, tad funkcijas $H(e^{j\omega T})$, $A(\omega)$ un $\varphi(\omega)$ arī ir frekvences periods ar tādu pašu atkārtotības periodu.

Atzīmētai īpatnībai, izrietoša no matemātiskām īpašībām aprakstošas cipara filtra frekvences raksturlīknes, ir visai dziļa un svarīga fiziskā jēga. Apskatīsim kādu diskreto frekvences ω_1 sinusoīdu, kura tiek padota cipara filtra ieejā:

$$\sin[\omega_1 nT + \Phi], \text{ pie } n=1, 2, 3, \dots, \quad (3.3)$$

kur Φ - brīvi izvēlēts fāzes leņķis. Noteiksim citas frekvences ω_2 sinusoīdas esamības iespēju, kuras vērtības laika momentā $T, 2T, \dots$ pilnīgi sakrīt ar sinusoīdas (3.3) vērtībām. Tas ir iespējams, ja ir spēkā vienādība:

$$\omega_1 nT + \Phi + 2k\pi = \omega_2 nT + \Phi \quad (3.4)$$

pie $k=1, 2, 3, \dots$.

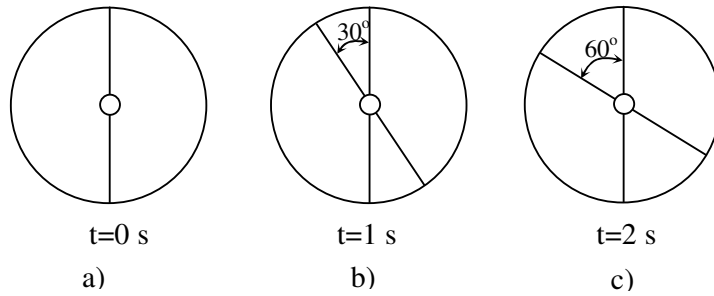
No (2.8) atrodam abu sinusoīdu vērtību sakrītības nosacījumu:

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{2\pi}{T}. \quad (3.5)$$

Tādā veidā meklējamā sinusoīda eksistē. Bet tas nozīmē, ka ciparu filtrs principiāli nespēj atšķirt sinusoīdas ar ω_1 un $\omega_1 + \frac{2\pi}{T}$ frekvencēm. Abos gadījumos nolasījumi,

kas tiek padoti uz filtra ieeju pilnībā sakrītīs, un sakrītīs arī filtra izejas signāli. Projektējot filtru, piemēram, joslu filtru, kas laiž cauri rūpniecības frekvences signālu, ir jāzina, ka šis filtrs tik pat labi laidīs cauri arī diezgan augstas frekvences signālus (traucējumi). Bez tam vienādojums (3.5) rāda, ka projektētāja spēkos ir iespēja "atbīdīt" bīstamos (kas ietekmē filtra darbību) traucējumus augsto frekvenču apgabalā. Tiešām, ka redzams no (3.5), pie diskretizācijas perioda T samazināšanas starpība starp neatšķiramām frekvencēm palielināsies. Lai izslēgtu nevēlamos efektus, kurus izsauc ar pārvades funkcijas periodiskumu, gadījumā kad uz ieeju padots sarežģītas formas signāls, nepieciešams izvēlēties diskretizācijas periodu T tā, lai uz visaugstāko frekvenci, kura ir ieejas signālā, pienāktos vismaz pa diviem nolasījumiem periodā.

Ir ievērots, ka efekti, kas saistīti ar nepietiekamu diskretizācijas frekvenci, ir novērojis katrs mūsdienu cilvēks skatoties kino. Tiešām, kino principa pamatā ir filmējamo procesu diskretizācija attīstoties filmēšanas tehnikai, auga arī diskretizācijas frekvence (kadru skaits sekundē), pieauga arī attēlojuma kvalitāte. Tomēr pat mūsdienu filmās dažreiz var novērot kā automašīnas riteņi griežas pretēji braukšanas virzienam, tas ir, uzfilmētais process netiek pareizi uztverts. Apskatīsim šo procesu sīkāk. Tāpēc ierosinu novērtēt riteņa kustības virzienu un leņķisko ātrumu, kura "fotogrāfijas" uzrādītas zīm.1.1.



Zīm. 3.1. Riteņa stāvokļi pēc laika momenta vienībām

No pirmā acu uzmetiena atbilde ir redzama: kustības virziens – pretī pulksteņa rādītāja virzienam; kustības ātrums – $30^\circ/\text{sek}$. Tomēr var minēt arī daudzas citas atbildes: kustības virziens – pulksteņa rādītāja virzienā, kustības ātrums – $150^\circ/\text{sek}$ vai $330^\circ/\text{sek}$ utt.

Ja ir zināms griešanās maksimālais ātrums, tad izvēloties pareizo diskretizācijas periodu, var izslēgt nepareizo procesa uztveri.

5. Frekvenču raksturlīkņu uzbūve

Apskatīsim īpatnības cipara filtra frekvenču raksturlīknes uzbūvē, kuras tiek izteiktas ar (2.3), (2.4), (3.1) un (3.2). Visbūtiskākā īpatnība, kuras principi tika apskatīti iepriekšējā paragrāfā – frekvenču raksturlīkņu periodiskums. Šī iemesla dēļ veidojot frekvenču raksturlīkni var ierobežoties tikai ar frekvenču diapazonu no nulles līdz ω_n frekvencei, kas vienāda ar

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T}, \quad (4.1)$$

tā kā frekvences raksturlīknes ir simetriskas attiecībā pret šo frekvenci.

Veidojot frekvenču raksturlīknes izmanto zināmās Eilera vienādības:

$$\begin{aligned} e^{jX} &= \cos X + j \sin X; \\ e^{-jX} &= \cos X - j \sin X. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ievērojot (4.2), var redzēt, ka reālā kompleksās frekvenču raksturlīknes daļa nerekursīviem ciparu filtriem sastāv no kosinusoīdu lineāras kombinācijas, bet imaginārā – no tādas pašu sinusoīdu kombinācijas. Ievērojot, ka $\cos X = \cos(-X)$, bet $\sin X = -\sin(-X)$, var secināt sekojošo:

1. Amplitūdas frekvences raksturlīkne nerekursīviem filtriem ir pāru funkcija (simetriska attiecībā pret ordinātas ass), kas ir acīmredzams, ja ievēro, ka

$$A(\omega) = |H(e^{j\omega T})| = \sqrt{R^2 \{H(e^{j\omega T})\} + I_m^2 \{H(e^{j\omega T})\}}. \quad (4.3)$$

2. Fāzes frekvences raksturlīkne nerekursīviem filtriem ir nepāru funkcija (simetriska attiecībā pret koordinātu sākumu), kas ir acīmredzams, ievērojot, ka

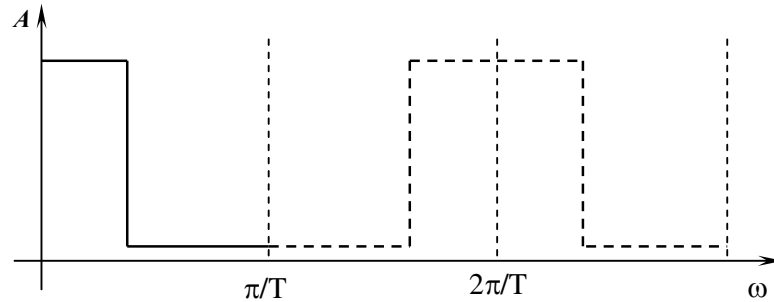
$$\varphi(\omega) = \arg[H(e^{j\omega T})] = \arctg \frac{I_m \{H(e^{j\omega T})\}}{R_e \{H(e^{j\omega T})\}}. \quad (4.4)$$

Var parādīt, ka iegūtie secinājumi ir taisnīgi arī priekš rekursīvo filtru frekvenču raksturlīknēm.

Iegūtie secinājumi blakus ar izteiksmi (4.1) ļauj vēl divas reizes ierobežot frekvenču diapazonu frekvenču raksturlīkņu uzbūvei, un reducēt to diapazonu no nulles līdz ω_n frekvencei, ko sauc par Naikvista frekvenci:

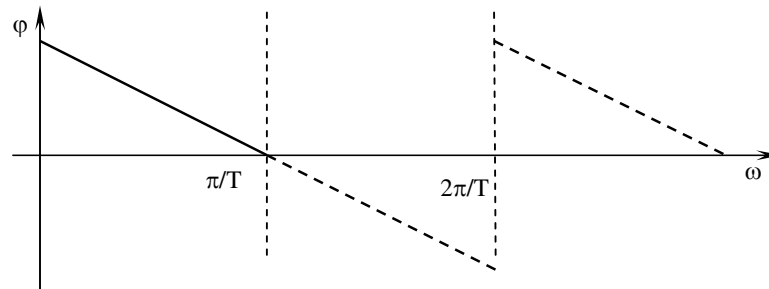
$$\omega_n = \frac{\pi}{T}. \quad (4.5)$$

Zīm.4.1. dots ekstrapolācijas piemērs, zināms līdz Naikvista frekvencei amplitūdas frekvences raksturlīknei.



Zīm. 4.1. Amplitūdas frekvences raksturlīknes uzbūve ciparu filtriem

Zīm.4.2. parādīts piemērs fāzes frekvences raksturlīknes ekstrapolācijā.



Zīm. 4.2. Fāzes frekvences raksturlīknes uzbūve ciparu filtriem

Veidojot frekvences raksturlīknes ciparu filtriem, nerodas nekādas matemātiskās grūtības, tomēr šī procedūra vispārējā gadījumā diezgan darbietilpīga. Mazāku darbietilpību prasa nerekursīvo filtru frekvenču raksturlīkņu uzbūve.

Bieži sastopami ciparu filtri, kuriem kompleksā pārvades raksturlīkne ir sekojoša:

$$H(Z) = \sum_{l=0}^N C_l Z^{-l}, \quad (4.6)$$

kur N - pāra skaitlis, bet $C_l = C_{N-l}$ - simetriskie koeficienti. Šajā gadījumā (4.6) var reducēt sekojoši:

$$\begin{aligned}
H(e^{j\omega T}) &= \sum_{l=0}^{N/2-1} C_1 e^{-jl\omega T} + C_{N/2} e^{-jN/2\omega T} + \sum_{l=N/2+1}^N C_1 e^{-jl\omega T} = \\
&= e^{-jN/2\omega T} \left\{ C_{n/2} + \sum_{l=0}^{N/2-1} C_1 e^{j(2l-N)\frac{\omega T}{2}} + \sum_{l=N/2+1}^N C_1 e^{-j(2l-N)\frac{\omega T}{2}} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Ja saskaitīt Eilera vienādības (4.2), tad iegūsim izteiksmi:

$$e^{jx} + e^{-jx} = 2 \cos X. \tag{4.8}$$

Ievērojot (4.8) un koeficientu simetriskumu, izteiksmi (4.8) reducējas sekojoši:

$$H(e^{j\omega T}) = e^{-jN\frac{\omega T}{2}} 2 \sum_{l=0}^{N/2-1} C_l \cos[(N/2-l)\omega T] + C_{N/2}, \tag{4.9}$$

no kurienes:

$$A(\omega) = |H(e^{j\omega T})| = \left| C_{N/2} + 2 \sum_{l=0}^{N/2-1} C_l \cos[(N/2-l)\omega T] \right|, \tag{4.10}$$

un

$$\varphi(\omega) = \arg[H(e^{j\omega T})] = -N\omega T / 2. \tag{4.11}$$

Amplitūdas frekvenču raksturlīkņu un fāzes frekvenču raksturlīkņu uzbūve pēc izteiksmes (4.10) un (4.11) nav darbietilpīga.

Apskatīsim vēl vienu frekvenču raksturlīkņu uzbūves piemēru. Par ciparu filtru pieņemsim starpību operatoru

$$y(nT) = X(nT + T) - X(nT). \tag{4.12}$$

Kompleksā pārvades funkcija tādām filtram nosakāma ar sekojošu izteiksmi:

$$H(e^{j\omega T}) = e^{-j\omega T} - 1, \tag{4.13}$$

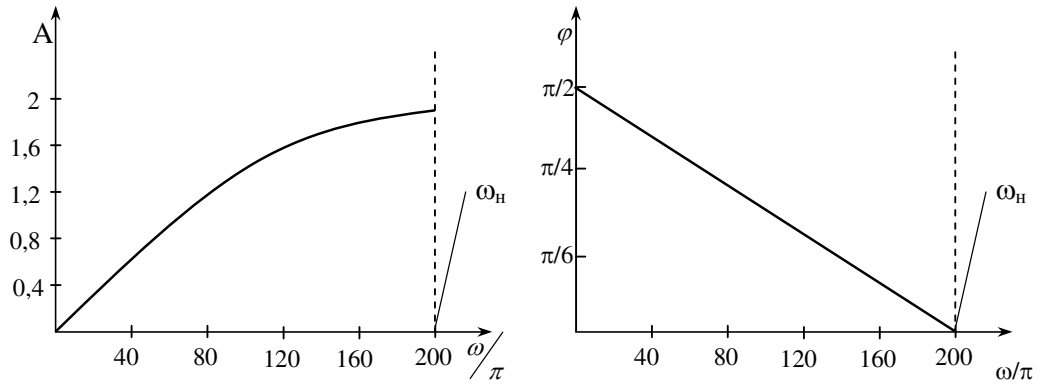
$$H(e^{j\omega T}) = \cos \omega T - 1 - j \sin \omega T. \tag{4.14}$$

No izteiksme (4.14) viegli iegūt amplitūdas frekvenču raksturlīkņu un fāzes frekvenču raksturlīkņu filtrus:

$$A(\omega) = \sqrt{(\cos \omega T - 1)^2 + (\sin \omega T)^2} = 2 \sin \frac{\omega T}{2}; \tag{4.15}$$

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(-\frac{\sin \omega T}{\cos \omega T - 1}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega T}{2}. \tag{4.16}$$

Cipara filtra amplitūdas frekvences raksturlīknes un fāzes frekvences raksturlīknes, kuras realizē operāciju (4.12) par $T = 5 \cdot 10^{-3}$ sek. (atbilst četriem nolāsījumiem rūpniecības frekvences periodā), parādīti zīm.4.3.



Zīm.3.4. Starpību operātoru frekvenču raksturlīknes

Acīmredzams, ka frekvenču raksturlīknes atkarīgas no diskretizācijas perioda T . Šī atkarība neļauj salīdzināt frekvenču raksturlīknes uzbūvētas uz dažādiem T . Šo trūkumu var izbēgt, ja pie raksturlīknes uzbūves pielieto normēto frekvenci $\dot{\omega}$, saistītu ar ω un T ar attiecību:

$$\dot{\omega} = \frac{\omega T}{2\pi}. \quad (4.17)$$

Pie tam raksturlīknes veidojas $\dot{\omega}$ izmaiņas diapazonā no 0 līdz 0,5.

6. NEREKURSĪVO CIPARU FILTRU SINTĒZE.

6.1 Ciparu filtru veidi un viņu pārvades funkcijas.

Atgriezīsimies pie kopīgā vienādojuma, kurš apraksta nerekursīvo filtru darbību. No formāla redzes viedokļa filtrus ar koeficientiem, var izdalīt divos gadījumos (nepārkāpjot galveno domu dotajā paragrāfā, ierobežosim izlases garumu līdz 5):

1. Filtru klase ar simetriskiem koeficientiem

$$y_n = aX_0 + bX_1 + cX_2 + bX_3 + aX_4. \quad (4.1)$$

Pārejot pie filtru pārvades funkcijas (aizvietojojot $X_n = e^{j\omega n}$) un ņemot vērā Eilera vienādojumu (3.9), vienādojums (4.1) izskatās šādi:

$$H(\omega) = 2a \cos 2\omega + 2b \cos \omega + C e^{j2\pi\omega}, \quad (4.2)$$

kas atļauj secināt: pie simetriskiem koeficientiem pārvades funkciju apraksta ar vienādojumu, kurš sastāv no kosinusu sastāvdaļām.

2. Filtru klase ar nesimetriskiem koeficientiem:

$$y_n = aX_0 + bX_1 + cX_2 + dX_3 + eX_4. \quad (4.3)$$

Dotajā gadījumā, pāreja pie pārvades funkcijas un ņemot vērā Eilera vienādojumu, var dabūt sekojošo vienādojumu:

$$H(\omega) = \{(a + e) \cos 2\omega + (d + d) \cos \omega + C + j[(a - e) \sin 2\omega + (b - d) \sin \omega]\} e^{j2\pi\omega} \quad (4.4)$$

Praksē ievērojot vienlīdzības

$$a = -e \quad \text{un} \quad b = -d$$

dabūjam

$$H(\omega) = [2a \sin 2\omega + 2b \sin \omega] j e^{j2\pi\omega} \quad (4.5)$$

Abos apskatītajos gadījumos filtru koeficienti pie neatkarīga mainīga lieluma ω ir veseli lielumi. Tātad filtra AFR attēlota kā trigonometriska rinda.

6.2. Ciparu filtru sintēzes matemātiskie pamati.

Iepriekšējā paragrāfā bija apskatīti divi praksē izplatīti gadījumi, kad ciparu filtru AFR nosaka ar kosinusa rindu (4.2) vai ar sinusa rindu (4.5). No formāla redzes viedokļa, abi trigonometrisko rindu veidi ir labi zināmi elektroenerģētisko specialitāšu studentiem. Patiešām, pietiek atcerēties Furje rindu, kuru plaši izmanto pie periodisko funkciju sadalīšanas atkarība no laika harmoniskās sastāvdaļās:

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \quad (4.6)$$

Zināms ka, pie pāru funkciju sadalīšanas pazūd sinusu sastāvdaļa (4.6) un paliek tikai kosinusa sastāvdaļa (salīdziniet (4.6) dotā gadījumā ar (4.2)). Pie nepāru funkciju sadalīšanas pazūd kosinusa sastāvdaļa un paliek tikai sinusa sastāvdaļa (salīdziniet (4.6) ar izteiksmi (4.5)). Atzīmēsim šeit, ka dažādu sistēmu AFR un FFR izraisa lielu interesi pateicoties tam, ka ieejošos un izejošos signālus var sadalīt Furje rindā.

Ievērojot analogiju starp izteiksmi (4.2) vai (4.4) un izteiksmi (4.5), paliek izdarīt izšķirošo soli, lai pārietu uz ciparu filtru sintēzi. Šo soli kavē Furje rindas zināšana un viņu pielietošana periodisko funkciju sadalīšanā. Nepieciešams pārvarēt ieradumu un atcerēties ka Furje rindā var būt sadalīta ne tikai laika funkcija, bet arī jebkura periodiskā funkcija ja vienlaicīgi ņemam vērā, ka ciparu filtru pārvades funkcija ir frekvenču periodiskā funkcija, tad varam secināt:

1. Ciparu filtru frekvenču raksturojumi var būt izteikti ar Furje rindu. Tāda izteiksme iespējama arī gadījumā, ja nav zināmi filtru koeficienti, bet zināmi tikai filtru AFR.
2. Izteicot doto AFR ar Furje rindu, automātiski dabūjam ciparu filtru koeficientus.

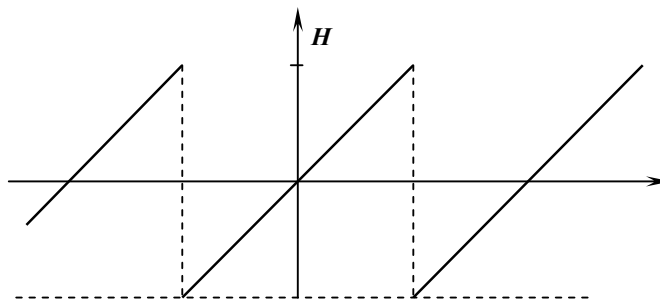
6.3. Ciparu filtru sintēzes piemēri.

Apskatīsim divus ciparu filtru sintēzes piemērus ar uzdotām AFR.

1. Piemērs. Pieņemsim, ka nepieciešam sintezēt ciparu filtru, kuram ir diferenciatora pārvades funkcija:

$$H^*(e^{j\omega T}) = \omega \quad (4.7)$$

Ar H apzīmēsim uzdoto frekvenču raksturojumu, kurai jāatbilst sintezējamā filtra frekvenču raksturlīknei H .



4.1. Zīm. Diferenciatora pārvades funkcijas grafiks

Lai novērstu nepieciešamību frekvenču raksturlīkņu izmaiņas pie diskretizācijas intervāla T izmaiņas, izmantosim normēto frekvenci $\hat{\omega}$, kura noteikta saskaņā ar (3.24). Pie tam uzskatīsim, ka funkcija (4.7) - nepāra un apskatīsim izmaiņas intervālu $\hat{\omega}$ - 0,5 līdz 0,5.

Aplūkojama funkcija dota 4.1. zīmējumā.

Sadalīsim funkciju $H(e^{j\omega T})$ Furje rindā [4].

Ņemot vērā, ka dota funkcija nepāra, bet apskatāmais intervāls ir simetriska atteiksmē pret $\hat{\omega} = 0$, dabūjam

$$a_m = \frac{1}{0,5} \int_{-0,5}^{+0,5} \hat{\omega} \cos\left(m \frac{\pi}{0,5} \hat{\omega}\right) d\hat{\omega} = 0. \quad (4.8)$$

Priekš sinusa koeficientiem dabūjam:

$$b_m = \frac{1}{0,5} \int_{-0,5}^{+0,5} \hat{\omega} \sin\left(m \frac{\pi}{0,5} \hat{\omega}\right) d\hat{\omega}. \quad (4.9)$$

Integrējot izteiksmi (4.9) pa daļām, dabūjam

$$\begin{aligned}
 b_m &= \frac{1}{0,5} \left[\frac{\dot{\omega} \left[-\cos\left(\frac{m\pi}{0,5} \dot{\omega}\right) \right]}{m\pi/0,5} \Big|_{-0,5}^{+0,5} + \frac{1}{m\pi/0,5} \int_{-0,5}^{+0,5} \cos\left(\frac{m\pi}{0,5} \dot{\omega}\right) d\dot{\omega} \right] = \\
 &= \frac{1}{0,5} \left[\frac{0,5 \cdot 0,5}{m\pi} 2(-1)^{m+1} + \frac{1}{m\pi/0,5} \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{0,5} \dot{\omega}\right)}{m\pi/0,5} \Big|_{-0,5}^{+0,5} \right] = \frac{1}{m\pi} (-1)^{m+1}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Tātad, funkcija (4.7) izsaka ar rindu

$$H^*(e^{j\omega T}) = \frac{1}{\pi} \left[\sin\left(\frac{\pi}{0,5} \cdot \dot{\omega}\right) - \frac{\sin\left(2\dot{\omega} \frac{\pi}{0,5}\right)}{2} + \frac{\sin\left(3\dot{\omega} \frac{\pi}{0,5}\right)}{3} + \dots \right]. \tag{4.11}$$

Aplūkosim tikai rindas pirmo sastāvdaļu un, veicot pārveidojumu, pretēji tam, kurš bija pielietots pie pārejas no (4.3) uz (4.4), dabūjam filtra vienādojumu

$$y_n = \frac{1}{2\pi} X_0 - \frac{1}{2\pi} X_2. \tag{4.12}$$

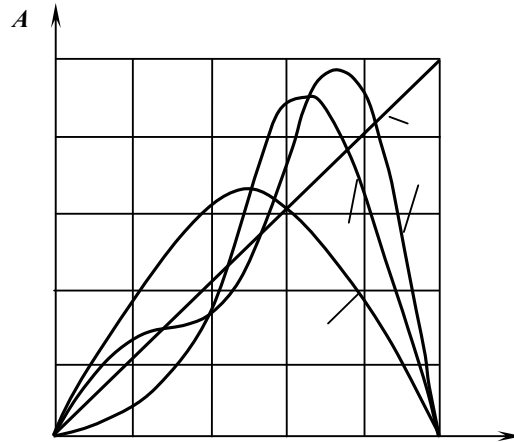
Ja aplūkosim tikai rindas pirmās divas sastāvdaļas, tad varam dabūt

$$y_n = \frac{1}{4\pi} X_0 - \frac{1}{2\pi} X_1 + \frac{1}{2\pi} X_3 - \frac{1}{4\pi} X_4. \tag{4.13}$$

Saglabājot pirmās trīs sastāvdaļas ciparu diferenciatora vienādojums izskatās sekojoši

$$y_n = \frac{1}{6\pi} X_0 - \frac{1}{4\pi} X_1 + \frac{1}{2\pi} X_2 - \frac{1}{2\pi} X_4 + \frac{1}{4\pi} X_5 - \frac{1}{6\pi} X_6. \tag{4.14}$$

Sintezēto filtru amplitūdas un frekvences raksturlīknes doti 4.2 zīmējumā



4.2. zīm. Filtru amplitūdas un frekvences raksturlīknes:

1 – aproksimejamā raksturlīkne;

2, 3, 4 - filtru frekvenču raksturlīknes, uzdotas ar vienādojumiem (4.12), (4.13) un (4.14).

2. piemērs. Pieņemsim, ka ir nepieciešams sintezēt ciparu filtru, kuram ir zemfrekvenču filtra raksturlīknes,

$$H^*(j\omega T) = \begin{cases} 1, & 0 < \omega < 0,2 \\ 0, & 0 < 2\omega < 0,5. \end{cases} \quad (4.15.)$$

Aproksimējot, uzskatīsim ka funkcija H^* ir pāra funkcija, t.i.

$$H^*(j\omega T) = H^*(-j\omega T). \quad (4.16.)$$

Izvirzīsim funkciju (4.15.) Furjē rindā. Ņemot vērā (4.16.) varam pierakstīt:

$$b_m = 0 \quad (4.17.)$$

Integrāļu rēķināšana Furjē rindas kosinusa koeficientiem dod rezultātu +0,5:

$$a_m = \frac{1}{0,5} \int_{-0,5}^{+0,5} H(j\omega T) \cos\left(m \frac{\pi}{0,5} \omega\right) d\omega = 4 \int_0^{0,2} \cos \frac{m\pi\omega}{0,5} d\omega. \quad (4.18.)$$

Tātad, zemfrekvenču filtra pārvades funkcijai iegūstam:

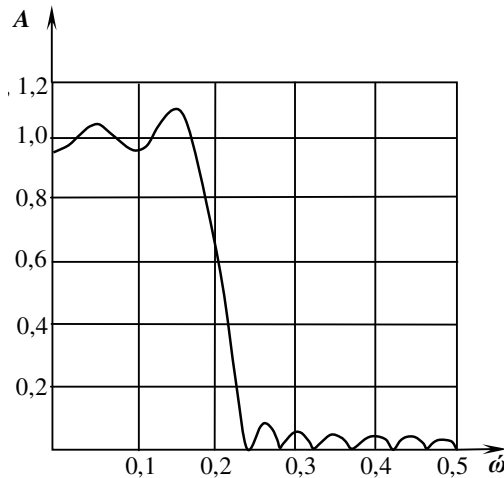
$$a_m = \int_0^{0,2} \cos 2\pi m \omega d\omega = \frac{2}{\pi m} \sin 0,4\pi m, \quad (4.19.)$$

Un atbilstošā Furjē rinda izskatīsies šādi:

$$H^*(j\omega T) = 0,4 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\sin 0,4\pi m}{\pi \cdot m} \right) \cos \omega m. \quad (4.20.)$$

Realizējot praktiski augstāk aprakstīto, rinda (4.20.) ir jāierobežo līdz gala garumam, izpildot pāreju no (4.20.) līdz reālai pārvades funkcijai $H(j\omega T)$, no kuras ar Eilera vienādību (3.1.5.) palīdzību var uzrakstīt ciparu filtra vienādojumu.

Attēlā 4.3. ir parādīta amplitūdas – frekvenču raksturlīkne filtram ar (4.16.) veida pārvades funkciju, saglabājot pirmos piecus rindas locekļus.



4.3.att. Aproximējamā 1. un aproksimējoša 2. zemfrekvenču ciparu filtru pārvades funkcijas 2.piemēra ilustrācijai.

Pēc pārvades funkciju un amplitūdas-frekvenču raksturlīkņu no normētās frekvences ω iegūšanas jāpāriet uz reālo frekvenci ω , kam izmanto izteiksmi (3.24.).

6.4. Ciparu filtru stabilitāte

Ciparu sistēmas, līdzīgi analogām, var būt nestabilas un, tātad, arī nederīgas praktiskai pielietošanai. Ciparu filtru stabilitātes raksturojumam pastāv vairākas definīcijas. Visplašāk izplatīts ir I I p I I (ierobežota izeja pie ierobežotas ieejas) tipa stabilitātes kritērijs. Tas nozīmē, kā ciparu filtrs ir stabils, ja tā reakcija uz ierobežotu ieejas signālu arī ir ierobežota. Parādīts, ka līnijas ciparu filtrs ir I I p I I tipa stabils tad un tikai tad, ja

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty, \quad (4.21.)$$

kur: $h(n)$ – filtra impulsa raksturlīkne.

Filtra impulsa raksturlīkne – tā ir filtra reakcija uz atsevišķu impulsu $\delta(nT)$, ko nosaka sekojoši:

$$\delta(nT) = \begin{cases} 0, & nT \neq 0 \\ 1, & nT = 0. \end{cases} \quad (4.22.)$$

Ir viegli parādīt, ka nosacījums (4.21.) nerekursīviem ciparu filtriem ar ierobežotu koeficientu skaitu vienmēr ir spēkā. No tā izriet, ka pielietojamie praksē nerekursīvie filtri vienmēr ir stabili.

Rekursīvie filtri var būt nestabili. Šinī gadījumā jāpēta projektējamā filtra stabilitāte. Stabilitātes pētījumi balstās uz pārvades funkcijas saucēja pārveidošanu polinoma formā un tā sakņu atrašanu. Pēc sakņu izvietojuma kompleksajā plaknē spriež par filtra stabilitāti.^[1,2] Filtrs strādās stabili, ja visas raksturvienādojuma saknes pēc absolūtās vērtības būs mazākas par vieninieku. Stabilitātes pētījumu atvieglošanai ir izstrādāti kritēriji, kas ir analogi Rausa-Gurvica kritērijiem [2].

6.5. Trokšņi ciparu filtros

Atgriezīsimies pie pašas pirmās operācijas, ko izpilda izbūvējot ciparu sistēmas, - analogi- digitālās pārveidošanas. Šo operāciju nevar veikt ar bezgalīgu precizitāti, un, tāpat, tā ir kļūdu avots. Pieņemsim, ka X_n ir "patiesā" mērāmā lieluma vērtība, bet pie tā tiek pielikta klāt kāda kļūda, - troksnis E . Pieņemsim, ka šai kļūdai matemātiskā cerība ir vienāda ar nulli

$$M[E] = 0 \quad (4.23.)$$

un tās dispersija ir :

$$D[E] = \sigma^2. \quad (4.24.)$$

Pieņemsim arī, ka pie dažādiem mērījumiem trokšņa E vērtības ir nekorelētas, un atradīsim trokšņa γ , kas rodas uz filtra izejas, matemātisko cerību un dispersiju. Ņemot vērā (3.1.), varam pierakstīt

$$y(nT) + \gamma_n = \sum_{i=0}^r C_i \{X_i[(n-i)T] + E_{n-i}\}. \quad (4.25.)$$

No tā, ņemot vērā ka summas matemātiskā cerība ir matemātisko cerību summa, kā arī iespēju iznest pastāvīgu lielumu aiz matemātiskās cerības zīmes [5], iegūstam

$$\begin{aligned} M[y(nT)] + M[\gamma_n] &= \sum_{i=0}^r (C_i M\{X_i[(n-i)T]\}) + \\ &+ C_i M[E_{n-i}] = \sum_{i=0}^r C_i X_i[(n-i)T] \end{aligned} \quad (4.26.)$$

Iegūtā savstarpējā attiecība ļauj secināt, ka

$$M[\gamma_n] = 0 \quad (4.27.)$$

t.i. ja ieejas trokšnim matemātiskā cerība ir vienāda ar nulli, tad arī trokšņa uz filtra izejas matemātiskai cerībai piemīt tāda pati īpašība.

Nosakot dispersiju uz filtra izejas, ņemsim vērā, ka nekorelētu gadījuma lielumu summas dispersija ir šo lielumu dispersiju summa, un, ka konstants lielums, iznesot to aiz dispersijas zīmes, ir jākāpina kvadrātā. Tad

$$D[y(nT) + j_n] = \sum_{i=0}^r C_i^2 D\{X_i[(n-i)T] + E_{n-i}\}. \quad (4.28.)$$

Ņemot vērā, ka ne gadījuma lieluma dispersija ir vienāda ar nulli, iegūstam:

$$D[\gamma_n] = \sum_{i=0}^r C_i^2 D[E_{n-i}] = \sigma^2 \sum_{i=0}^r C_i^2. \quad (4.29.)$$

Tādejādi, trokšņu pastiprināšanu filtrācijas procesa gaitā pilnīgi nosaka filtra koeficientu kvadrātu summa. Izteiksme (4.29) ir noderīga analizējot sistēmu, kas satur ciparu filtrus, precizitāti.

4.6. Uzdevumi un jautājumi paškontrolei

Atrodiet nerekursīvā ciparu filtra, kura pārvades funkcija ir

$$H(j\omega T) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 < \omega < 0,25 \\ 1, & \text{при } 0,25 < \omega < 0,5 \end{cases} \quad (4.30.)$$

veida, koeficientus.

Kādiem jābūt izejas datiem, lai frekvences raksturlīknes, kas ir uzbūvētas, izmantojot normēto frekvenci, un kas ir parādītas att.4.2., uzbūvēt izmantojot reālo frekvenci ω .

Pie kādiem nosacījumiem nerekursīvie filtri strādā stabili.

7. Ciparu filtrācija mēriekārtu sintēzes uzdevumos.

5.1. Optimizācijas uzdevumu nostādnes

Releju aizsardzības uzdevumos un energosistēmas automātikā, sintezējot mēriekārtas, pašsaprotama ir cenšanās minimizēt vidējos zudumus, kuru rašanās

iemesls ir neideāla sintezējamās iekārtas darbība. Vidējo zudumu minimizācijas uzdevums aprakstāms ar izteiksmi šādā veidā [6] :

$$\dot{I} = \min \int \int \dots \int_{(D)}^n L(x_1, x_2, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n, \quad (5.1)$$

kur L-funkcijas, kas saista zudumus (iespējams naudas izteiksmē) ar energosistēmas darba režīmu (ietverot īsslēguma bāzes režīmus) un mēriekārtas darbību; D-parametru X_1, \dots, X_n esamības apgabalu, kuri ietekmē sintēzes iekārtas darbību; $f(X_1, \dots, X_n)$ -parametru X_1, \dots, X_n sadalījuma blīvums.

Uzdevuma risināšana (5.1) veidā izrādās praktiski neiespējama grūtību dēļ, kas rodas nosakot funkciju $L(X_1, \dots, X_n)$.

Uzdevums var tikt vienkāršot, ja integrējamo apgabalu L sadala apakšapgabalos, kuru iekšpusē var uzskatīt ka $L = \text{const}$. Iepriekš minētā sadalīšana var tikt izdarīta izejot no esošās pieredzes ekspluatējot releju aizsardzību un pieņemot virkni pieļaides:

1. Esot īsslēgumam sintezējamās iekārtas aizsardzības zonā, zudumi nav atkarīgi no objekta darba režīma pie nosacījuma, ka īsslēgums atslēdzas uzdotajā laikā.
2. Esot ārējam īsslēgumam zudumi veidojas aizsardzības neselektīvas darbības rezultātā un nav atkarīgi no objekta darba režīma un aizsargājamā objekta.

Ja pieņem iepriekš nosauktās pieļaides, tad sintezējamās iekārtas optimizācijas uzdevumu var noreducēt kā divu kritēriju minimizācijas uzdevumu:

- vienas nostrādes gadījumā (īsslēgumam zonā) nenostādes varbūtība P_{NEN} ;
- vienas nenostādes gadījumā (iekšējam īsslēgumam) nostādes varbūtība $P_{\text{LIE.NOSTR}}$.

Sakarību starp nosauktajiem funkcionēšanas efektivitātes kritērijiem un faktoriem, kuri ietekmē optimizējamās iekārtas darbu, nosakāmi ar funkcijas palīdzību šādā veidā;

$$P = \int \int \dots \int_{(S)}^n f(x_1, x_2, \dots, x_n) dX_1, \dots, dX_n, \quad (5.2)$$

kur S n-tais apgabals eksistējot atkarīgiem faktoriem X_1, \dots, X_n , neapmierinot nostrādes nosacījumus iekšējos īsslēgumos (P_{NEN} noteikšanas gadījumā) vai apmierinot nostrādes nosacījumus pie ārējiem īsslēgumiem ($P_{\text{LIE.NOSTR}}$ noteikšanas gadījumā).

Faktori, kuri ietekmē mērāmo orgānu funkcionēšanu, ir pietiekoši daudz: īsslēguma tālums, īsslēguma veids, aizsargājamās līnijas noslodze, pārejas pretestība

īsslēguma vietā, energosistēmas darba režīmu raksturojošie parametri. Ar nosaukto faktoru summāro ietekmi tiek noteikti ieejas strāvu un spriegumu atskaites lielumi, kuri pienāk uz ciparu filtru ievadiem.

Ciparu filtru koeficienti nosaka augstāk minētā apgabala (S) robežas. No tā izriet, ka distances mērīšanas iekārtu ciparu filtru izvēles uzdevumu var izteikt sekojošā izskatā:

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{NEN}} &= \varphi_1(K_1^U, K_2^U, \dots, K_m^U, K_1^i, \dots, K_m^i) \\ P_{\text{LIE.NOSTR}} &= \varphi_2(K_1^U, K_2^U, \dots, K_m^U, K_1^i, K_2^i, \dots, K_m^i) \end{aligned} \right\} \rightarrow \min, \quad (5.3)$$

kur K_j^U, K_j^i – ciparu filtru koeficienti attiecīgi pie ieejas sprieguma un strāvas mērīšanas.

Tādā veidā, pēc izreiksmes (5.3), ciparu filtra sintēzes uzdevums reducējas uz divkritēriju optimizācijas uzdevumu. Pie kam, eksistē ievērojams skaits optimizācijas parametru - $K_1^U, \dots, K_m^U, K_1^i, \dots, K_m^i$. Bez tā, ir pamats domāt, ka funkcijām φ_1 un φ_2 ir daudzi lokāli minimumi. Nepieciešams arī atzīmēt, ka apskatāmās funkcijas ietver sevī vairākkārtējas integrēšanas operācijas un, tāpat, no to lielumu aprēķina viedokļa lielu darbapjomu (pat pie mūsdienu ESM izmantošanas). Izteiksmē (5.3) nosaukto uzdevuma risinājumu īpatnību kopums veido to praktiski neatrisināmu ar meklējamo optimizācijas metodi. Strikto optimizācijas metožu pielietošanas neiespējamība novedusi pie daudzu ciparu filtru sintēzes algoritmu esamības. Šie algoritmi izveidoti uz pieņēmumu (hipotēžu) bāzes par ieejas signālu formu vai pēc ciparu filtru frekvences raksturlīknes formas. Pēc uzdotās frekvences raksturlīknes ciparu filtru sintēzes metodes apskatītas iepriekšējā nodaļā. Šajā nodaļā turpmāk tiks apskatītas ciparu filtru sintēzes metodes, kas balstās uz pieņēmumiem par ieejas signālu formu. Pie kam tiks parādīts, ka pat tajos gadījumos, kad tā vai cita parametra noteikšanas algoritms, kurš nosaka energosistēmas stāvokli, sintezēts ignorējot ciparu filtru būvēšanas metodes, ciparu filtrācija tomēr rodas. Kā rezultātā, pie uzrādīto algoritmu darba analīzes rodas nepieciešamība pēc ciparu filtrācijas teorijas. Pie sākotnējās iepazīšanās ar releju aizsardzības un energosistēmas automātikas iekārtām var ievērot šķietamu pretrunu starp prasībām, kas pieprasītas šīm iekārtām, un to funkcionēšanas principiem. No vienas puses, releju aizsardzības un automātikas būtība ir iedarboties uz energosistēmas objektiem avārijas un nenormālos režīmos - pastāv nosacījumi tās pareizai darbībai esot intensīviem pārejas procesiem. No otras puses, lielākā daļa

iekārtu reaģē uz parametriem, kas raksturīgi nostabilizējušiem režīmiem un sinusoidāliem signāliem. Sintezējot lēndarbīgas iekārtas, kas rada izejas signālu laikā, kurš pārsniedz pārejas procesu nostabilizēšanos, minētās pretrunas automātiski noņemamas. Ciparu iekārtu sintēzes gadījumā, kuras operē ar nolasījumiem, tas ir praktiski ar momentānām ieejas signālu vērtībām, pārejas procesu ignorēšana var novest pie iekārtas nepareizas darbības. Kā attaisnojums tādā gadījumā diezin vai var tikt uzskatīts sākotnējais pieņēmums, kurš neņēma vērā pārejas procesu eksistenci un pieņēmumus sintezējot projektējamo iekārtu. Teiktais vēlreiz norāda uz ciparu filtru izdalīšanas svarīgumu releju aizsardzības funkcionēšanas algoritmos un ciparu filtru automātikā un izskatot to funkcionēšanu pārejas procesu gadījumos. Šis izdevums neuzstāda sev par mērķi analizēt dažādus releju aizsardzību ciparu iekārtu un energosistēmu automātikas funkcionēšanas algoritmus. Tādēļ dotos algoritmus jāuzskata kā tiešus ciparu filtrācijas izmantošanas piemērus. Tādā gadījumā jāņem vērā, ka tiek aplūkoti tikai vienkāršākie automātikas ciparu iekārtu funkcionēšanas algoritmi, bet to uzskaitījums ir tālu nepilnīgs.

5.2. Mērāmo orgānu algoritmi, kuri sintezēti pieņemot, ka neeksistē pārejas procesi.

Sintezējot releju aizsardzības un energosistēmas automātikas mēriekārtu orgānus, nostabilizējušā režīma nosacījumos kā izejas pieņēmums kalpo pieņēmums par ieejas signālu sinusoidālo raksturu, kuru raksturo ar vienādojumu

$$U_{ie} = U_a \sin(\omega t + \theta), \quad (5.4)$$

kur U_a , ω , θ – amplitūdas lielums, frekvence un attiecīgi fāzes leņķis. Izveidojot lielāko daļu releju aizsardzības un energosistēmas automātikas iekārtu, nepieciešams zināt amplitūdu U_a vai fāzes leņķis θ ieejas signāliem. Nodiferencējam vienādojumu (5.4):

$$U'_{ie} = U_a \omega \cos(\omega t + \theta), \quad (5.5)$$

Risinot kopīgi vienādojumus (5.4) un (5.5), iegūst

$$U_{ie}^2 + \frac{(U'_{ie})^2}{\omega^2} = U_a [\sin^2(\omega t + \theta) + \cos^2(\omega t + \theta)] \quad (5.6)$$

No tā var atrast signāla amplitūdas vērtību:

$$U_a = \sqrt{U_{ie}^2 + \frac{(U'_{ie})^2}{\omega^2}}. \quad (5.7)$$

Dalot (5.4) uz (5.5) iegūstam:

$$\operatorname{tg}(\omega t + \theta) = \frac{U_{ie}}{U'_{ie}} * \omega$$

kas dod iespēju esot diviem ieejas lielumiem, noteikt leņķi starp tiem:

$$\varphi = \theta_1 - \theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{U_{ie1}}{U'_{ie1}} \omega - \operatorname{arctg} \frac{U_{ie2}}{U'_{ie2}} \omega \quad (5.8)$$

Vienādojumā (5.7) un (5.8), kuri ļauj atrast amplitūdu un fāzi ieejas signāliem, ietilpst atvasinātie lielumi. Atvasinājumi var tikt noteikti caur nolasījumu lielumiem

$$\dot{U}_k = \frac{1}{2T} (U_{k+1} - U_{k-1}). \quad (5.9)$$

Vienādojums (5.9) ir kāds gadījumam no vienādojuma (3.1), t.i. tas apraksta ciparu filtra darbu. Aplūkojot amplitūdas-frekvences raksturlīkni tādām filtram, ļauj spriest par amplitūdas un un ieejas signālu fāzes noteikšanas precizitāti:

1. Apskatītais algoritms ir jūtīgs pret pārejas procesiem, jo satur diferencējošu ciparu filtru, pasvītīrošu augstākās harmoniskās.
2. Diferencējošais ciparu filtrs vājina lēnizdiestošu eksponenciālu sastāvdaļu ietekmi, bet tā kā līdztekus ar nofiltrētām ieejas signāla vērtībām (U_{ie}) aplūkojamā algoritmā pastāv nenofiltrētas (U_{ie}) signāla vērtības, algoritms kopumā ir jūtīgs arī pret eksponenciāliem lielumiem.

Eksponenciālie raksturlielumi, kuri rodas energosistēmā pārejas procesu laikā, bieži izrādās galvenie traucējošie faktori nostabilizējušos režīmu signālu parametru precīzai noteikšanai. Nelielas apskatītā algoritma izmaiņas ļauj mazināt eksponenciālu sastāvdaļu ietekmi uz signālu amplitūdas un fāzes noteikšanas precizitāti. Pietiekami nodiferencēt vienādojumu, lai iegūtu:

$$U''_{ie} = - U_a \omega^2 \sin(\omega t + \theta) \quad (5.10)$$

Risinot kopīgi vienādojumu (5.5) un (5.10), var parādīt, ka:

$$\frac{(U'ie)^2}{\omega^2} + \frac{(U''ie)^2}{\omega^4} = U_a, \quad (5.11)$$

no kā izriet

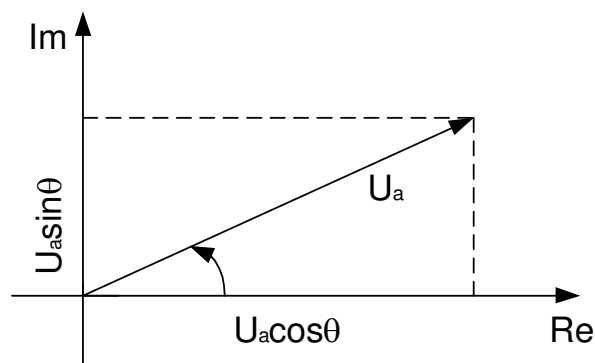
$$U_a = \frac{1}{\omega} \sqrt{(U'ie)^2 + \frac{(U''ie)^2}{\omega^2}}. \quad (5.12)$$

Acīmredzami, ka analogiskā veidā var atrast arī leņķi starp diviem signāliem.

Aizvietojot (5.12) izteiksmē pirmo un otro atvasinājumu attiecīgi ar pirmo un otro starpību (skat. nod. 2), iegūstam sinusoidālā signāla amplitūdas un leņķa noteikšanas algoritmu caur tā atskaitījumiem. Algoritms satur divus ciparu filtrus lai iegūtu pirmo un otro starpību. Acīmredzami, ka filtri labi apslāpē nemainīgo daļu un zemākās frekvences. Par nožēlu, šie filtri palielina augstāko harmonisko ietekmi, kas rada aplūkotā algoritma praktiskā pielietojuma diezgan problemātisku.

Pārejas procesu aproksimācija ar Furjē rindas palīdzību.

Šajā paragrāfā apskatāmā pieeja ir ieguvusi lielāko pielietojumu un vairums gadījumos, tā ir devusi labākos rezultātus programmējamo algoritmu sintēzes mēriekārtās releju aizsardzībā un automātiskā energosistēmā. Apskatāmās pieejas pamatā ir trigonometriskā Furjē rinda. Parādīsim ieejas signāla galveno harmonisko kosinusoidāles veidā



1. zīm. Ieejas signāls kosinusoidālas veidā.

$$U_{ie} = U_A \cos(\omega t + \theta) \quad (1)$$

un pieņemsim galvenos pieņēmumus: ieejas signāla mēriekārta var tika parādīta periodiskas funkcijas veidā. Pieņemtie pieņēmumi vairums gadījumos nav noteiktas konkrēti, bet tās noved pie lielām vienkāršošanām, no kurām savukārt izriet iespēja parādīt periodisko funkciju Furjē rindas veidā:

$$U_{ie}(t) = \frac{a_0}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t]. \quad (2)$$

No visiem lielumiem augstāk minētā rindā (2), mūs interesē tikai koeficienti pie vērtības $k=1$, kurus savukārt var iegūt interējot doto izteismi:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U_{ie}(t) \cos \omega t dt; \\ b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U_{ie}(t) \sin \omega t dt; \end{aligned} \quad (3)$$

No analogā ieejas signāla $U_{ie}(KT)$ pāriesim pie tā atskaites $U_{ie}(KT)$ un pielietojot trapeces formulu, kura rēķina integrējamus lielumus (3) mēs iegūstam sekojošo:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\omega T}{2\pi} \sum_{k=0}^N U_{ie}(kT) * \cos \omega kT; \\ b_1 &= \frac{\omega T}{2\pi} \sum_{k=0}^N U_{ie}(kT) * \sin \omega kT \end{aligned} \quad (4)$$

kur $N = \frac{2\pi}{\omega T}$.

Zinot koeficientus a_1 un b_1 iespējams parādīt galveno harmonisko ieejas signālam sekojošas izteismes veidā:

$$U_{ie} = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t, \quad (5)$$

kura viegli pārvēršas sekojošā izteismē:

$$U_{ie} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \cos \omega t + \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \sin \omega t \right). \quad (6)$$

Ja ieviešam apzīmējumus (skatīt 1. zīm.):

$$\left. \begin{aligned} U_A &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2}; \\ \cos \theta &= \frac{a}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}, \\ \sin \theta &= \frac{-b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

tad izteiksme (6) tiek pārveidota atbilstoši formulas (1) veidā, kas savukārt ļauj izdarīt sekojošus secinājumus:
koeficienti a_1 un $U(-b_1)$, kas tika iegūti no sekojošas izteiksmes (4), var izskatīt kā ieejas signāla galvenās harmoniskās reālo un imagināro daļu. Zinot koeficientus a_1 un b_1 un izmantojot izteiksmi (7) viegli ir iespējams atrast signāla amplitūdi un fāzes lenķi.

Atgriežoties pie izteiksmes (4) pieminēsim, ka tās ir tikai nedaudz izmainītas nemainīgu ciparu filtru izteiksmes. Īstenībā, lai iegūtu ciparu filtru izteiksmi “īstā” veidā, ir nepieciešams izteiksmē (4) kosinusus un sinusus aizstāt ar skaitļiem (kas ir iespējams gadījumā, ja mums ir zināmi ω un T).

Uzbūvēsim frekvienču raksturlielni ciparu filtriem, kuri tiek noteikti ar vienādojuma (4) palīdzību. Acīmredzot, ka veicot lieluma a_1 aprēķinu būs antisimetriski koeficienti

$$\cos \omega k T = -\cos(N - k)T, \quad (8)$$

bet savukārt lielumam b_1 būs simetriski koeficienti

$$\sin \omega k T = \sin(N - k)T, \quad (9)$$

Ievērojot $H(\omega) = [2a \sin 2\omega + 2b \sin \omega] j e^{j2\pi\omega}$ izteiksmi iegūstam sekojošu

$$H(\omega) = -j e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \frac{\omega T}{2\pi} \sum_{k=0}^{(N-1)/2} (\cos \omega k T) \sin\left[\left(\frac{N-1}{2} - K\right)\omega T\right]. \quad (10)$$

savukārt ievērojot izteiksmi $H(\omega) = 2a \cos 2\omega + 2b \cos \omega + C) e^{j2\pi\omega}$, iegūsimsekojošu

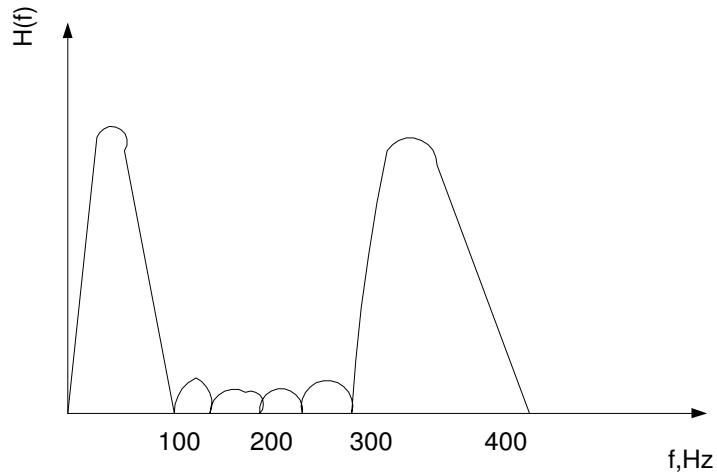
$$H(\omega) = -j e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \frac{\omega T}{2\pi} \sum_{k=0}^{(N-1)/2} (\sin \omega k T) \cos\left[\left(\frac{N-1}{2} - K\right)\omega T\right]. \quad (11)$$

Augstāk minētās izteiksmēs (10) un (11) iekavās ievietotie kosinusi un sinusi ir filtra koeficienti pie noteiktas frekvences $\omega (\omega = 2\pi f, \omega = 314)$.

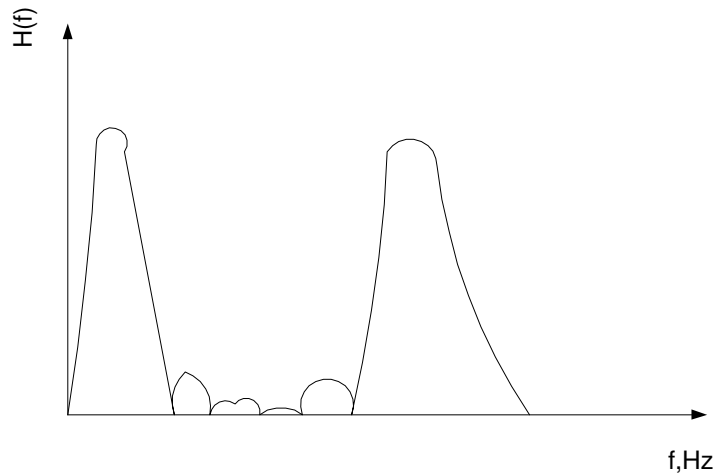
Savukārt sinusi un kosinusi, kuri nav ievietoti iekavās ω - lenķa frekvence, neatkarīgi mainīgā.

Pēc augstākminētiem apsvērumiem nevajadzētu apvienot norādītos koeficientus ar tiem atbilstošām funkcijām.

Uzbūvēt frekvenču raksturlīknes atbilstoši vienādojumiem (10) un (11), pie jebkuras frekvenču kvantēšanas nesagādā nekādas grūtības. Filtru amplitūdas – frekvenču raksturlīknes ievērojot (4) pie $T = 2,5 \cdot 10^{-3}$ s ir parādītas 2. zīm..



2. zīm. Amplitūdas – frekvenču raksturlīknes filtriem pēc izteksmes (4)



Pētot filtru amplitūdes-fāzes raksturlīknes, kas tiek iegūtas no Furjē rindas parāda, ka pieaugot frekvences kvantēšanai ir iespējams izfiltrēt vairums nevēlamās harmoniskās svārstības. Vienlaicīgi tāda izpēte parāda, pati svarīgākā raksturlīknes daļa iekļaujas no 0 līdz 100Hz, kas pilnībā nav atkarīga no frekvences kvantēšanas. Vairums reālos gadījumos jau izvēloties 8 punktus periodā izdodas iegūt apmierinātu rezultātu filtram. Viens no galvenajiem faktoriem, kas ir apskatīts apskatāmajā pieejā pie mēriekārtu sintēzes releju aizsardzībā un automātiskā ir iegūtā izteiksme (4) ieejas signāla ortogonālā sastāvdaļa. Zinot ieejas lieluma ortogonālās sastāvdaļas un

aritmētisko operāciju darbību rezultātā ir iespējams veikt simetrisko komponentu filtrāciju, noteikt lenķi starp signāliem u.t.t.

Simetrisko komponentu filtri.

Lai izveidotu simetrisko komponentu filtru tiek izmantotas mums zināmās sakarības:

$$U_1 = 1/3(U_A + aU_B + a^2 * U_C)$$

$$U_2 = 1/3(U_A + a^2 U_B + a * U_C) \quad (12)$$

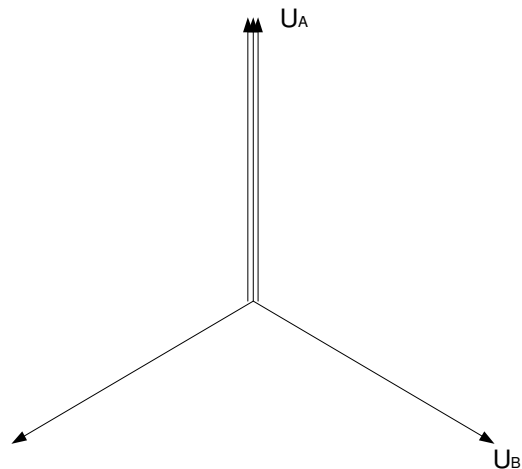
$$U_0 = 1/3(U_A + U_B + U_C)$$

kur U_1 - tiešās secības komponente;

U_2 - apgriestās secības komponente;

U_0 - nulsecības komponente;

$$\left. \begin{array}{l} a = e^{j120^\circ} \\ a^2 = e^{-j120^\circ} \end{array} \right\} \text{ pagrieziena operatori.}$$



a) zīm. tiešās secības komponentes

Jāņem vērā, ka simetriskās komponentes nesatur apgriestās secības un nulsecības komponentes, jo veicot to pagriešanu par attiecīgajiem grādiem iegūstam rezultātu, kas ir vienāds ar nulli.

Apskatīsim iespēju iegūt simetrisko komponentu atskaites punktus izejot no vienādojumiem, zinot katra vienādojumu (12) ortogonālās atskaites punktu. Acīmredzams, ka lai realizētu jebkuru no vienādojumiem (12) ir nepieciešams zināt un veikt vektora pagriešanu par $\pm 120^\circ$.

Izsakam sprieguma vektoru U_B sekojošā izteiksmē:

$$U_B = U_{B\text{Re}} + jU_{B\text{Im}} = U_B e^{j\theta} \quad (13)$$

Pagriezīsim šo vektoru par 120° :

$$\begin{aligned} aU_B &= U_B e^{j120^\circ} = U_B e^{j(120^\circ + \theta)} = U_B [\cos(120^\circ + \theta) + j \sin(120^\circ + \theta)] = \\ &= U_{B\text{Re}} \cos 120^\circ + U_{B\text{Im}} \sin 120^\circ + j(U_{B\text{Re}} \sin 120^\circ + U_{B\text{Im}} \cos 120^\circ). \end{aligned} \quad (14)$$

Tādā veidā vektora pagriešanas operācijas tiek veiktas ar vienkāršu aritmētiku operāciju darbībām (14), kas tiek veiktas ar šī vektora ortogonālajām komponentēm.

Analogā veidā ir iespējams iegūt jebkuru veida lineāru kombināciju vairākiem ieejas lielumiem.

Pretestības aprēķināšana.

Veicot pretestības aprēķinus ir iespējams izmantot strāvas un sprieguma amplitūdas aprēķināšanu kā arī vektoru starp tiem. Vienlaicīgi pretestību ir iespējams aprēķināt tikai pielietojot nedaudzas aritmētiskās darbības. Tik tiešām, diferenciālvienādojums, kas apraksta procesus R-L ķēdē izskatās sekojošs:

$$U = R_i + L \frac{di}{dt}. \quad (15)$$

Diferencējot vienādojumu (15) iegūstam:

$$\frac{du}{dt} = R \frac{di}{dt} + L \frac{di^2}{dt^2}. \quad (16)$$

Pie sinusoidālām strāvām un spriegumiem ir pareizas sekojošas attiecības:

$$\begin{aligned} \frac{di(t)}{dt} &= \omega i(t) e^{j90^\circ}; \\ \frac{du(t)}{dt} &= \omega u(t) e^{j90^\circ} \\ \frac{di^2(t)}{dt^2} &= \omega^2 i(t) e^{j180^\circ} = -\omega^2 i(t). \end{aligned} \quad (17)$$

Ja izteiksmēs (15) un (16) strāvas i un sprieguma u vietā ievietojam aktīvās komponentes, kas ir iegūtas no filtriem, kas darbojas saskaņā ar izteiksmi (4), tad varam izteikt reaktīvajām komponentēm:

$$\left. \begin{aligned} \frac{di(t)}{dt} &= -b_1(i) * \omega \\ \frac{du(t)}{dt} &= -b_1(u) * \omega, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

kur $b_1(i)$ un $b_1(u)$ - imaginārā daļa strāvas un sprieguma pirmai harmoniskai svārstībai. Ievērojot izteiksmi (18), apzīmējot strāvas un sprieguma reālās daļas ar simboliem $a_1(i)$ un $a_1(u)$, izteiksmes (15) un (16) var būt parādītas sekojošā veidā:

$$\left. \begin{aligned} a_1(u) &= Ra_1(i) - x_1 b_1(i); \\ b_1(u) &= Rb_1(i) - x_1 a_1(i) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Pie zināmiem mums koeficientiem a un b no izteiksmes (19) viegli ir atrast R un x_1 :

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{a_1(u) * a_1(i) + b_1(u) * b_1(i)}{a_1^2(i) + b_1^2(i)}; \\ x_1 &= \frac{b_1(u) * a_1(i) - a_1(u) * b_1(i)}{a_1^2(i) + b_1^2(i)}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

No tā izriet, ka izteiksme (20) atļauj rēķināt pretestības ķēdi pie zināmiem strāvas un sprieguma atskates punktiem. Pie tam tiek veiktas tikai elementārākās aritmētiskās funkcijas.

Lenča aprēķināšana pie diviem sinusoidāliem lielumiem.

Lai uzbūvētu daudzas releju aizsardzības un automātikas mēriekārtas energosistēmā tiek izmantota lenča mērīšana starp diviem sinusoidāliem signāliem. Pieņemsim, ka ir nepieciešams aprēķināt lenķi starp sprieguma u un strāvas i galvenām harmoniskām svārstībām. Filtrācija tiek veikta atbilstoši izteiksmei (4). No tā izriet, ka mēs iegūstam strāvas un sprieguma reālo un imagināro daļu, kas var būt parādītas sekojošā veidā:

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= a(u) + jb(u) = u_A e^{j(\omega t + \theta_1)}; \\ i(t) &= a(i) + jb(i) = i_A e^{j(\omega t + \theta_2)} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Mums interesejošam lenķim ir vektors Z , kas var būt parādīts sekojošā veidā:

$$Z = \frac{u(t)}{i(t)} = \frac{a(u) + jb(u)}{a(i) + jb(i)} = \frac{u_A}{i_A} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (22)$$

Izteiksmi (22) ir viegli pārveidot sekojošā veidā:

$$Z = \frac{[a(u) * a(i) - b(u)b(i)] + j[a(i)b(u) + a(u) * b(i)]}{a^2(i) + b^2(i)}, \quad (23)$$

no kurienes:

$$\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2) = \frac{a(i) * b(u) + a(u)b(i)}{a(u)a(i) - b(u)b(i)}. \quad (24)$$

Tādā veidā, tengensa lenķi starp divām sinusoidām var izrēķināt ar nelielām aritmētisko darbību palīdzībām. Lai uzbūvētu daudzas releju un automātikas iekārtas energosistēmā ir pietiekams, ka tiek kontrolēts $\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)$, bet nevis pats lenķis.

Signāla frekvences aprēķināšana.

Pieņemsim, ka eksistē trīs atskaites punkti sinusoidālam signālam (iespējams, ka tie ir iegūti ar ciparu filtru palīdzību), kurus varam parādīt sekojošā veidā:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_A \sin[\omega(t - T)]; \\ u_2 &= u_A \sin(\omega t); \\ u_3 &= u_A \sin[\omega(t + T)]. \end{aligned} \quad (25)$$

Atradīsim nozīmi vienādojumam $(u_1 + u_3)/u_2$:

$$\frac{u_1 + u_3}{u_2} \frac{\sin \omega(t - T) + \sin \omega(t + T)}{\sin \omega t} = 2 \cos \omega T. \quad (26)$$

No tā izriet, ka:

$$f = \frac{1}{2\pi T} \arccos \frac{u_1 + u_3}{2u_2}. \quad (27)$$

Vairums gadījumu zināt frekvences vērtību nav obligāti. Pietiek veikt tikai funkcijas $\cos \omega T$ kontroli, kuras vērtība pie noteiktas T vērtības ir atkarīga no frekvences ω .

Tādu kontroli veikt ir diezgan vienkārši:

$$\cos \omega T = \frac{u_1 + u_3}{2u_2}. \quad (28)$$